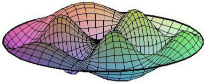
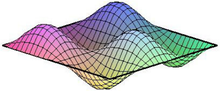
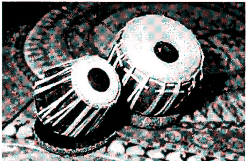
Kann man die Form einer Trommel hören?

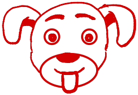
Prof. Dr. Daniel Grieser

21. Tag der Mathematik
Universität Oldenburg
7. September 2023









Grundlagen der Schwingungslehre

1. Eigenschaften eines **Tons**:

Tonhöhe	$\widehat{=}$	Frequenz (Schnelligkeit der Schwingung)
Lautstärke	$\widehat{=}$	Amplitude (Höhe der Schwingung)

2. Jeder **schwingende Gegenstand** besitzt:
   - Eigenfunktionen: Schwingungsprofile, die während einer Schwingung immer gleich bleiben (bis auf zeitabhängigen Faktor).
   - Zu jeder Eigenfunktion eine Eigenfrequenz: Die Frequenz dieser Schwingung.

3. **Was wir hören:**
   Die Eigenfrequenzen des Gegenstands (= Obertöne).

Gleichung der Eigenfunktionen y und Eigenfrequenzen ν für eine Saite:

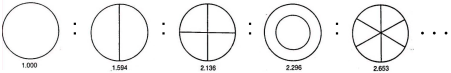
$$y'' = -\nu^2 y$$

Jede beliebige Schwingungsform ist eine Summe von Eigenschwingungen, mit verschiedenen Amplituden. Die Frequenzen und Amplituden bestimmen die Klangfarbe.
Die Amplituden hängen davon ab, wie der Gegenstand ‚angeschlagen'

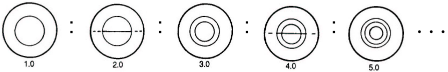
Einige Eigenfrequenzen und Eigenfunktionen

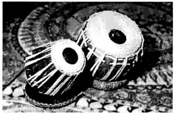
Saite:	1 : 2 : 3 : 4 : 5 . . .
Quadratische Trommel:	1 : 1,58 : 2 : 2,54 : 2,91 . . .

Runde Trommel:

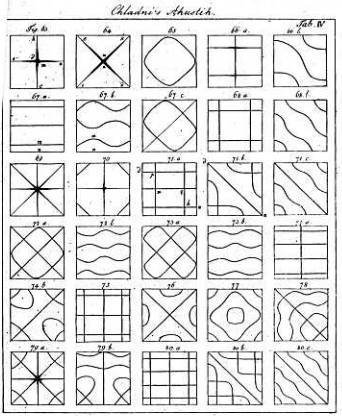


Indische Tabla:





Chladnis Klangfiguren



Ein Problem

1. Wie beeinflußt die Form eines schwingenden Gegenstandes die Eigenfrequenzen und die Eigenfunktionen?

2. Umgekehrt: Kann man die Form des Gegenstandes aus den Eigenfrequenzen bestimmen?

Marc Kac: *Can one hear the shape of a drum?*
(American Mathematical Monthly 1966)

Methodik

1. Schritt:

Physikalische Überlegungen	$\longrightarrow$	Mathematische Gleichung

2. Schritt:

Lösen der Gleichung:

- Formel (ein Glücksfall!)
- Computer (für Einzelfälle nützlich, wenig Verständnis qualitativer Zusammenhänge)
- Kunst der Mathematik: wie man trotzdem etwas erfährt, auch wenn man es nicht genau ausrechnen kann (Intuition, Ideen, Geduld).

Trommeln und Primzahlen

Beispiel: Quadrat $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$

Eigenfunktionen: $u(x,y) = \sin nx \cdot \sin my$ mit $n, m \in \mathbb{N}$

Eigenfrequenzen: $\sqrt{n^2 + m^2}$

Frage: Welche Eigenfrequenzen kommen vor?

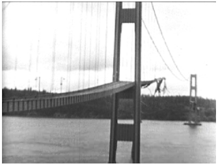
Beispiele: $5 = 1^2 + 2^2$, $13 = 2^2 + 3^2$, $65 = 4^2 + 7^2$
(Frequenz $= \sqrt{5}$ etc.)
aber z.B. 7, 11, 77 gehen nicht

Frage: Welche natürlichen Zahlen lassen sich als Summe zweier Quadrate schreiben?

Antwort: Die genaue Antwort hängt damit zusammen, welche Primzahlen in der Primfaktorzerlegung der Zahl vorkommen. (Zwei-Quadrate-Satz)

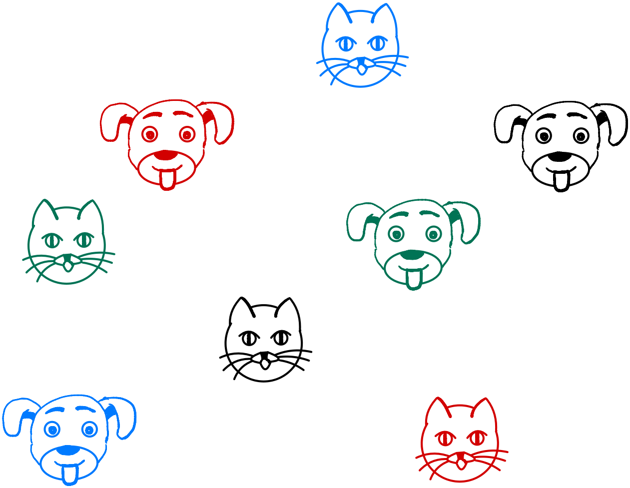
Beispiel: $65 = 5 \cdot 13$

Eigenfrequenzen treten überall auf

- Musik: Obertöne
- Technik: Resonanzen  (Tacoma-Brücke 1940)
- Chemie: Spektrallinien  (Helium)
  (denn Farben $\hat{=}$ Frequenzen von Lichtwellen)
- KI: verwendet zur Klassifizierung von Bildern ('image clustering')

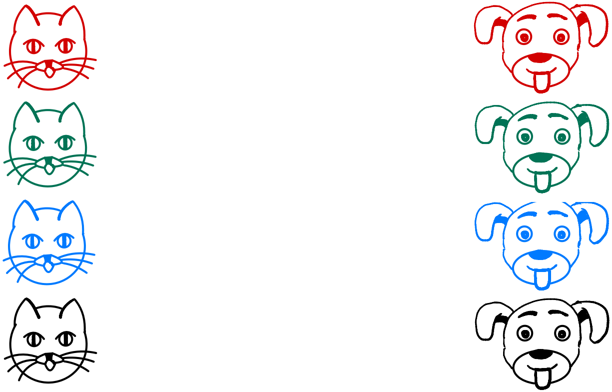
Mathematik verbindet alles

Eine Sammlung von Bildern



Aufgabe: Ordne die Bilder nach Kategorien

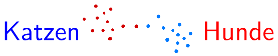
Lösung: Nach Kategorien (Katzen, Hunde) geordnet



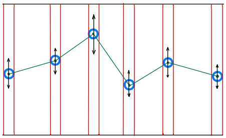
Wie kann ein Computer das machen?

Lösung: ‚Spectral clustering‘-Algorithmus

- Bilder von Tieren entsprechen Datenpunkten

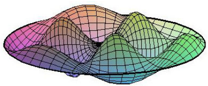


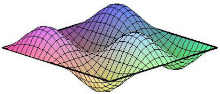
- **Idee: bringe die Datenpunkte zum Schwingen**
- verbinde Datenpunkte mit Kanten (Gummibänder)
- Bänder lasch oder fest, je nach Ähnlichkeit der Bilder

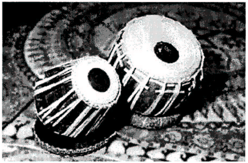


- Gruppen nahe beieinanderliegender Datenpunkte schwingen gemeinsam – das lässt sich an den Eigenfunktionen ablesen

Kann man die Form einer Trommel hören?







Was kann man hören?

Ein Satz: (mathematisch, d.h. ideale Trommel, ideales “Gehör”)

Aus den Eigenfrequenzen einer Trommel lassen sich bestimmen:

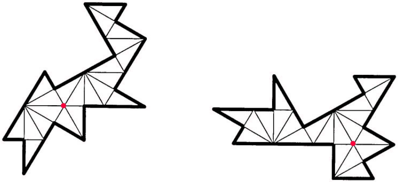
- ihr Flächeninhalt,
- die Länge des Randes,
- die Anzahl der Löcher,
- ob eine Kugel auf einem Billiardtisch in der Form der Trommel sich chaotisch verhält oder nicht.

Beweisidee: Eigenfrequenzen $\nu_1 \leq \nu_2 \leq \nu_3 \leq \ldots \longrightarrow \infty$.

Wie schnell $\nu_n \longrightarrow \infty$?	$\rightsquigarrow$	Fläche
Fluktuation um erste Näherung	$\rightsquigarrow$	Umfang
Detail der Fluktuation	$\rightsquigarrow$	Löcher
Statistik der Abstände $\nu_{n+1} - \nu_n$	$\rightsquigarrow$	Chaos

Kann man die genaue Form der Trommel hören?

Nein!



klingen gleich!

C. Gordon, D. Webb, S. Wolpert: Inventiones Mathematicae 1992,
P. Buser, J. Conway, P. Doyle, K.-D. Semmler: Int.Math.Res.Not. 1994.

Ein offenes Problem:
Kann man die Form einer Trommel ohne Ecken hören?

Zusammenfassung

1. Was man hören kann: Die Eigenfrequenzen eines Gegenstands.
2. Für ein Quadrat hängen die Eigenfrequenzen mit Quadratzahlen und Primzahlen zusammen.
3. Ähnliche Probleme treten in vielen anderen Zusammenhängen auf.
4. Man kann die Form einer Trommel nicht hören – aber einiges kann man hören: Fläche, Randlänge usw.
5. Es gibt viele spannende ungelöste Probleme.

Viel Spaß mit der Mathematik!

https://uol.de/daniel-grieser