Prof. Dr. B. Vertman
M. Wunderlich

WS 2016/2017
WWU Münster

Übungen zur Differentialgeometrie I
Serie 3

Aufgabe 9 (2 Punkte)**.** Beweisen Sie die Unabhängigkeit des Differentials von der Wahl der Kurven (Satz 5.6).

Aufgabe 10 (4 Punkte)**.** Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und konvex. Enthält C die x_1-Achse, so gibt es eine abgeschlossene und konvexe Menge $C' \subset \mathbb{R}^{n-1}$ mit

$$C = \left\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \in \mathbb{R}, (x_2, \dots, x_n) \in C'\right\}.$$

Wir sagen dann auch C *spaltet als* $C = \mathbb{R} \times C'$ und nennen derartige Resultate *Spaltungssätze.*

Hinweis. Betrachten Sie die Verbindungsstrecken von einem Punkt $p \in C$ zu $(x, 0, \dots, 0)$ für $x \to \pm\infty$.

Aufgabe 11 (6 Punkte)**.** a) Betrachten Sie die Einheitssphäre $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ und leiten Sie explizit die Formel für die stereographische Projektion

$$\varphi_N^{-1} : \mathbb{S}^2 \setminus \{N = (0,0,1)\} \to \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$$

auf die Äquatorialebene, sowie die Formel für Ihre Umkehrung φ_N, her.

b) Bestimmen Sie den Tangentialraum $T_p\mathbb{S}^2$ in den Punkten $p = (1,0,0), p = (0,1,0)$ und $p = (0,0,-1)$ als Bild des Differentials $D\varphi_N$.

c) Betrachten Sie ferner die Abbildung, welche $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$, welchen wir als $x-y$-Ebene im $\mathbb{R}^3$ betrachten, auf den Äquator der $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, welcher senkrecht zu $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{(-1,1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$ steht, abbildet. Berechnen Sie das Differential dieser Abbildung in lokalen Koordinaten.

Aufgabe 12 (4 Punkte)**.** Sei $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit, $p \in M$ und $0 \neq v \in T_pM$. Es bezeichne ν einen Normalenvektor an p, d.h. $\nu \neq 0$, $\nu \perp T_pM \subset \mathbb{R}^3$. Es sei $E_p = p + \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\nu, v\}$. Zeigen Sie: Es gibt eine Umgebung V von $p \in \mathbb{R}^3$ so, dass $M \cap E_p \cap V$ eine reguläre Kurve ist.

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Freitag, den 11. November 2016, um 10.00 Uhr, in den Briefkästen im Hörsaalgebäude.