Prof. Dr. B. Vertman
M. Wunderlich

WS 2016/2017
WWU Münster

Übungen zur Differentialgeometrie I
Serie 6

Aufgabe 21 (4 Punkte). i) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine $(n-k)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Für $p \in M$ sei $\nu_p M$ der Unterraum aller Vektoren aus $T_p\mathbb{R}^n$, welche bezüglich des Standardskalarprodukts $\langle\ ,\ \rangle$ senkrecht auf T_pM stehen. Zeigen Sie, dass $\nu M = \coprod_{p\in M} \nu_p M$ ein Vektorbündel über M ist, das sogenannte *Normalenbündel*.

ii) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $M = f^{-1}(0)$ reguläres Urbild. Zeigen Sie, dass ein glatter Schnitt $\sigma \in \Gamma(\nu M)$ existiert, welcher nicht verschwindet. Zeigen Sie ferner, dass ein Diffeomorphismus

$$\varphi : \nu M \to M \times \mathbb{R},$$

so dass $\varphi|_{\pi^{-1}(p)} : \pi^{-1}(x) \to \mathbb{R}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraumisomorphismus für alle $p \in M$ ist und $\mathrm{proj}_M \circ \varphi = \pi$ gilt, wobei π die Fußpunktabbildung bezeichnet. Wir nennen dann νM trivial, denn dies ist eine globale Trivialisierung.

Aufgabe 22 (4 Punkte). Seien $X, Y \in \Gamma(TM)$ mit Flüssen Φ_t, Ψ_t. Zeigen Sie, dass dann die Vektorfelder kommutieren, also $[X, Y] = 0$ gilt, genau dann, wenn die Flüsse kommutieren, d.h. $\Phi_t \circ \Psi_s = \Psi_s \circ \Phi_t$ für alle t, s gilt.

Aufgabe 23 (4 Punkte). Sei $f : M^m \to N^n$ eine *Immersion*, d.h. eine differenzierbare Abbildung mit $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ injektiv für alle $p \in M$. Sei ferner g^N eine Riemannsche Metrik auf N. Dann definieren wir den *Pullback von g^N auf M via f* durch

$$(f^*g^N)_p(X, Y) := g^N_{f(p)}(df_p(X), df_p(Y)).$$

Zeigen Sie, dass durch $f^*g^N =: g$ eine Riemannsche Metrik auf M gegeben ist.

Aufgabe 24 (4 Punkte). Sei $f : M \to N$ eine differenzierbare Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten und seien X, Y Vektorfelder auf M, welche f-verwandt zu Vektorfeldern $\hat{X}, \hat{Y}$ auf N sind. Zeigen Sie: Dann ist auch die Lieklammer $[X, Y]$ f-verwandt zu der Lieklammer $[\hat{X}, \hat{Y}]$.

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Freitag, den 2. Dezember 2016, um 10.00 Uhr, in den Briefkästen im Hörsaalgebäude.