§ 14. Die Exponentialabbildung

(M, g) Riem. Mfk; $p \in M$; $v \in T_pM$

$\gamma_v : [0, I_{max}(v)) \longrightarrow M$ eindeutig bestimmte Geodätische s.d.

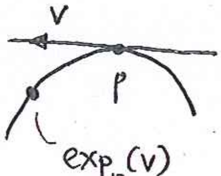
- $\gamma_v(0) = p$; $\dot\gamma_v(0) = v$
- $I_{max}(v)$ maximale Existenzzeit, dh. Geodätische zur maximalen Lösung von $\frac{D\dot\gamma}{dt} = 0$ fortgesetzt. (Das Intervall ist halboffen!)

<u>Definition 14.1</u> $\mathcal{U}_p := \{ v \in T_pM \mid \gamma_v(1)$ existiert, dh $I_{max}(v) \geq 1 \}$

- $\mathcal{U}_p \neq \emptyset$, da für $0 \in T_pM$; $\gamma_0(t) = p$ unendliche Existenzzeit hat.
- $\mathcal{U}_p$ ist sternförmig, dh falls $v \in \mathcal{U}_p \Rightarrow \alpha v \in \mathcal{U}_p$ für $\alpha \in [0,1]$

  denn: DGL $\frac{D\dot\gamma^F}{dt} = 0$ bleibt erfüllt auch für $t \mapsto \alpha t$

  und $\gamma_{\alpha v}(t) = \gamma_v(\alpha t)$ für $\alpha t \in [0, I_{max}(v)]$.
- $\mathcal{U}_p$ ist offen, da Lösungen von DGL's stetig(!) vom Anfangswert $\dot\gamma_v(0) = v$ abhängen.



<u>Definition 14.2</u> Die Exponentialabbildung

- $\exp_p : \mathcal{U}_p \to M$; $v \longmapsto \gamma_v(1)$.
- $\exp : \biguplus_{p \in M} \mathcal{U}_p \longrightarrow M$; $\exp|\mathcal{U}_p := \exp_p$.

Ü Geodätische in $SO(n) \subset \mathbb{R}^{n^2} \equiv M(n, \mathbb{R})$ mit der aus der Eukl. Norm auf $\mathbb{R}^{n^2}$ induz. Metrik sind gerade die Abbildungen $\exp(tA)$; $A \in TSO(n)$

Daher die Namensgebung (auch $TSO(n)$ berechnen lassen) und $TO(n)$

Lemma 14.3 (Eigenschaften der Exponentialabb.)

(1) $\exp_p(0) = p$

(2) $\exp_p : \mathcal{U}_p \to M$ ist diffbar

[Lösungen für $\dot{y}(t) = f(y(t))$; $y(0) = y_0$ für f diffbar, hängen diffbar vom Anfangswert y_0 ab]

(3) $D\exp_p\big|_0 : T_0(T_pM) \equiv T_pM \to T_pM$

ist gerade gleich id_{T_pM}.

[$D\exp_p\big|_0[v] = \frac{d}{dt}\Big|_0 \exp_p(tv) = \frac{d}{dt}\Big|_0 \gamma_{tv}(1)$

$(\gamma_{\alpha v}(t) = \gamma_v(\alpha t)) \quad = \frac{d}{dt}\Big|_0 \gamma_v(t) = v.$]

(4) $\exp_p$ ist ein lokaler Diffeo, dh. es ex. $\varepsilon_p > 0$ s.d.

$$\exp_p : B_{\varepsilon_p}(0) \to \exp_p(B_{\varepsilon_p}(0))$$

ist ein Diffeo, insbesondere injektiv.

ε-Ball von T_pM wird diffeomorph mit einer off. Umg. auf M ident.

[wegen (3) ist $D\exp_p\big|_0 = \mathrm{id}_{T_pM}$ invertierbar, daher folgt die Aussage mit dem Umkehrsatz

($f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig db; $Df(x_0)$ inv-bar, dann ex. offene Umg. $\mathcal{U}_\varepsilon(x_0) \subset \mathcal{U}$ s.d $f\big|_{\mathcal{U}_\varepsilon(x_0)}$ Diff.)]

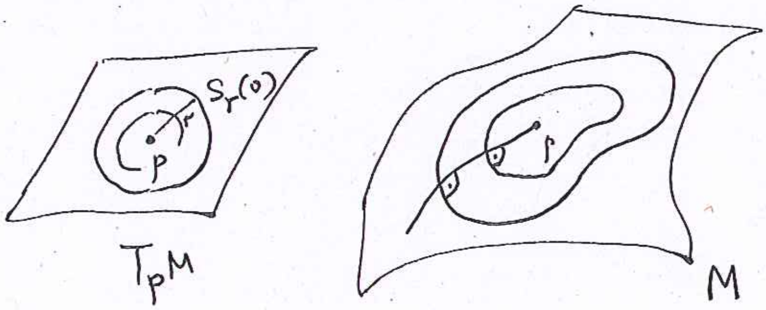
(5) Die Konstante $\varepsilon_p > 0$ kann in einer kleinen Umgebung von p, vom Fußpunkt unabhängig gewählt werden, ie

$$\forall p \in M \; \exists \, \mathcal{W}_p \subset M, \varepsilon > 0 \; \forall \tilde{p} \in \mathcal{W}_p : \varepsilon_{\tilde{p}} \geq \varepsilon.$$

[siehe Skript von Böhm].

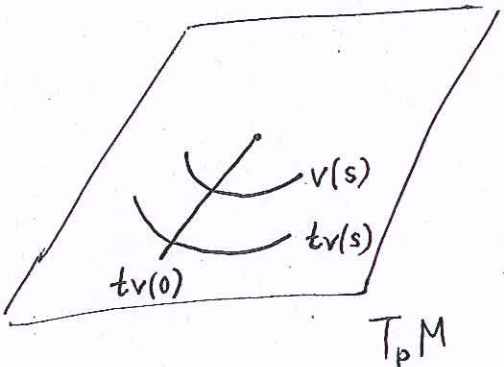
Lemma 19.4 (Lemma von Gauß)

Die von $p \in M$ ausgehenden Geodätischen schneiden im ersten Schnittpunkt die Bilder $\exp_p\left(S_r(0) = \{v \in T_pM \mid \|v\|_{g_p} = r\}\right)$ senkrecht; $r \in (0, \varepsilon_p)$.



[Kurven schneiden sich senkrecht, wenn deren Tangentialv. am Schnittpkt senkrecht sind].

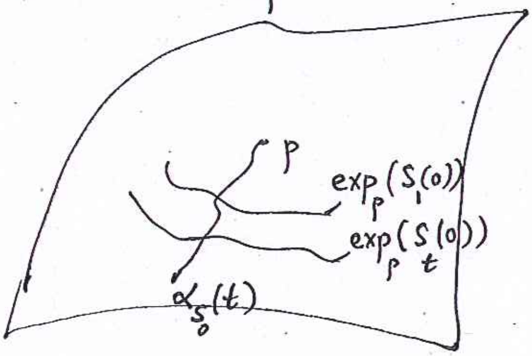
Beweis: sei $v: (-\delta, \delta) \to T_pM$ diffbare Kurve mit $\|v(s)\| \equiv 1$.



Definiere Schar von Kurven $v(t,s) = tv(s)$

- $t \in [0, r]$ radiale Variable
- $s \in (-\delta, \delta)$ sphärische Variable

Setze $\alpha(t,s) := \exp_p(v(t,s))$



- für alle festen $s_0 \in (-\delta, \delta)$: $\alpha(t, s_0) = \alpha_{s_0}(t)$ ist eine Geodätische.
- für alle festen $t \in [0, r]$: $\alpha(t_0, s)$ ist Teilstück von $\exp_p(S_{t_0}(0))$

(Verallgemeinerte) 1 Variationsformel:

Für beliebige diffbare Kurvenscharen $\alpha_s(t)$, $t \in [a,b]$

gilt: $\frac{d}{ds}\Big|_0 L(\alpha_s) = \left\langle \frac{\partial \alpha_0}{\partial t} ; \frac{\partial \alpha_s}{\partial s}(s=0,t) \right\rangle \Big|_{t=a}^{t=b}$

$$- \int_a^b \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial s}(s=0,t) ; \nabla_{\dot{\alpha}_0} \dot{\alpha}_0(t) \right\rangle_g dt$$

der 2-te Term war in der Vorlesung im Beweis von Satz 13.2 (Kürzeste $\Rightarrow$ geod.) wo die Randterme der partiellen Int (1-ter Term) sich kürzten.

Hier:

- $\frac{d}{ds}\Big|_0 L(\alpha_s) \overset{\text{Def}}{=} \frac{d}{ds}\Big|_0 \int_0^r \| \dot{\alpha}_s(t) \| \, dt$

$$\overset{(\text{Lemma } 14.3\ (3))}{=} \frac{d}{ds}\Big|_0 \int_0^r \underbrace{\| v(s) \|}_{\equiv 1} dt = \frac{d}{ds}\Big|_0 r = 0.$$

- $\frac{d}{ds}\Big|_0 L(\alpha_s) \overset{\text{1. Var Form.}}{=} \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial t}(s=0,t) ; \frac{\partial \alpha}{\partial s}(s=0,t) \right\rangle \Big|_{t=0}^{t=r}$

$$- \int_0^r \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial s}(s=0,t) ; \underbrace{\nabla_{\dot{\alpha}_0} \dot{\alpha}_0}_{=0\text{, da Geodätische}} \right\rangle dt$$

$$= \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial t}(s=0,t) ; \frac{\partial \alpha}{\partial s}(s=0,t) \right\rangle \Big|_{t=0}^{t=r}$$

$$\underset{\substack{\alpha_s(t=0) \equiv p \\ \text{ist const in } s.}}{=} \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial t}(s=0,t=r) ; \frac{\partial \alpha}{\partial s}(s=0,t=r) \right\rangle \overset{!}{=} 0$$

Tangentialvektor der Geodätische $\alpha_0(t)$ im Schnittpunkt $t=r$

Tangentialvektor des Bildes $\exp_p(S_r(0))$

<u>Korollar 14.5</u> Die Exponentialabb. ist eine "radiale Isometrie"

d.h. für $v \in \mathcal{U}_p$; $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

a) $\| D\exp_p\big|_v [\alpha v] \|_{\exp_p(v)} = \| \alpha v \|_p$

d.h. $D\exp_p$ ist längenerhaltend in die radiale Richtg

b) für alle $w \in T_pM$ mit $g_p(v,w) = 0$ gilt:

$$\left\langle D\exp_p\big|_v [v] \, ; \, D\exp_p\big|_v [w] \right\rangle_{\exp_p(v)} = 0$$

d.h. $D\exp_p$ ist winkelerhaltend ($\perp$-erhaltend)

<u>Beweis:</u> (a) $D\exp_p\big|_v [\alpha v] = \frac{d}{dt}\big|_0 \exp_p(v + t\cdot(\alpha v))$

$= \frac{d}{dt}\big|_0 \exp_p((1+t\alpha)v) = \frac{d}{dt}\big|_0 \gamma_v(1+t\alpha)$

$= \alpha \cdot \dot{\gamma}_v(1)$.

Da Geodätische nach Bogenlänge param. sind

gilt: $\| \dot{\gamma}_v(1) \| = \| \dot{\gamma}_v(0) \| = \| v \|$.

(b) Beweis folgt exakt wie in Lemma 14.4. $\boxtimes$

<u>Beachte:</u> $D\exp_p$ ist in sphärische Richtungen im Allgemeinen keine Isometrie mehr.

Der Injektivitätsradius

vgl. Lemma 14.3 (4)

<u>Definition 14.6</u> $\operatorname{inj}(p) := \sup\{\varepsilon_p > 0 \mid \exp_p : B_{\varepsilon_p}(0) \to \text{Bild inj}\}$

$\in (0, \infty]$ heißt Injektivitätsradius von (M,g) am Punkt p.

$$\mathrm{inj}(M,g) := \inf_{p \in M} (\mathrm{inj}(p)) \in [0,\infty].$$
heißt Injektivitätsradius von (M,g).

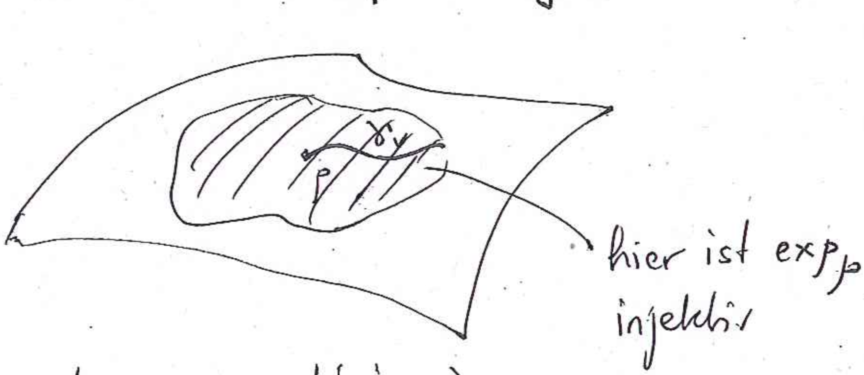
Bemerkung:

a) Um jeden $p \in M$ ex. eine Umgebung $\mathcal{W}_p \subset M$ und $\delta_{\mathcal{W}_p} > 0$ so dass für alle $q \in \mathcal{W}_p$: $\mathrm{inj}(q) \geq \delta_{\mathcal{W}_p}$. Deswegen ist für M kompakt (durch endlich viele solche $\mathcal{W}_p$'s überdeckbar) $\mathrm{inj}(M,g) \gneq 0$.

b) Falls M NICHT KPT, dann kann evtl $\mathrm{inj}(M,g) = 0$.

c) Aus der Definition folgt zunächst $\exists \, \varepsilon \in (0, \mathrm{inj}(p))$:
s.d. $\exp_p : B_\varepsilon(0) \to \exp_p(B_\varepsilon(0))$ injektiv
Man kann zeigen (evtl später) dass dies auch für $\varepsilon = \mathrm{inj}(p)$ gilt:
dh: $\exp_p : B_{\mathrm{inj}(p)}(0) \to \exp_p(B_{\mathrm{inj}(p)}(0))$ ist injektiv.

Satz 14.7 Sei (M,g) Riem. Mfk, $p \in M$; $v \in T_pM$ mit $\|v\| = 1$. Dann ist $\gamma_v : [0, \mathrm{inj}(p)] \to M$



die (bis auf Umparametrisierung) eindeutig bestimmte Kürzeste zwischen p und $\gamma_v(\mathrm{inj}(p))$.

Ü (ohne Beweis)

[Das zeigt: Kürzeste $\Rightarrow$ Geodätische (Satz 13.2)
Geodätische $\not\Rightarrow$ Kürzeste (Beispiele)
aber: Geod. im Inj-Bereich $\Rightarrow$ Kürzeste.

§ 15. Der Satz von Hopf – Rinow

<u>Ziel</u>: Äquivalente Charakterisierung von (M, d_g) als vollständigen metrischen Raum.

Äquivalenz zu $\mathcal{U}_p = T_pM$ an dieser Stelle erläutern (s. 92 oben)

<u>Definition 15.1</u> (M, g) heißt geodätisch vollständig, falls alle Geodätischen auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind.

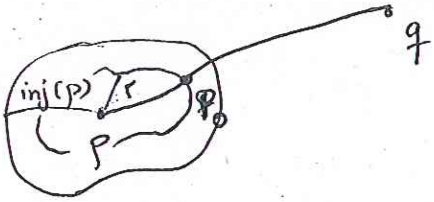
~~[illegible] $\exp_p$ ist auf [illegible]~~

Ü $\mathbb{H} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$

- $g = g^{\mathbb{R}^2}$, dann ist $(\mathbb{H}, g)$ nicht geodätisch vollst.
- $g = g^{\mathbb{H}}$; $g^{\mathbb{H}}_{(x,y)} = \frac{1}{y^2} \cdot g^{\mathbb{R}^2}_{(x,y)}$, dann ist $(\mathbb{H}, g^{\mathbb{H}})$ g. vollst.

<u>Lemma 15.2</u> Sei (M, g) zusammenhängend, $p, q \in M$, $p \neq q$. Dann existiert für $r \in (0, \mathrm{inj}(p))$ mit $r < d_g(p,q)$ ein Punkt $p_0 \in \partial B_r(p)$ mit

$$d(p,q) = d(p, p_0) + d(p_0, q) \qquad (*)$$



~~Intuition des Lemmas: Kurve von p nach q muss i.A. den Inj-Bereich verlassen, solange sie aber drin läuft, ist Kürzeste.~~

<u>Beweis</u>: $r < \mathrm{inj}(p) \Rightarrow \partial B_r(p) = \exp_p(S_r(0))$ ist kompakt
$f(u) := d_g(u, q)$ ist stetig in u und nimmt auf der kompakten Menge $\partial B_r(p)$ ihr Min. an, in p_0.
Wir zeigen p_0 erfüllt $(*)$

Sei $c : [a,b] \to M$ stückweise diffbare Kurve $c(a) = p$, $c(b) = q$
Da $r < d(p,q)$, ex. $t \in (a,b)$ mit $c(t) \in \partial B_r(p)$.

$$\Rightarrow L(c) = \underbrace{L(c|_{[a,t]})}_{\text{wird analog abgeschätzt}} + \underbrace{L(c|_{[t,b]})}_{\geq f(c(t)) \geq \min f|_{\partial B_r(p)} = d_g(p_0, q)} \geq d_g(p, p_0) + d_g(p_0, q).$$

Da c beliebig war $\Rightarrow d_g(p,q) \geq d_g(p,p_0) + d_g(p_0,q)$
Dreiecksungleichg $\Rightarrow d_g(p,q) \leq d_g(p,p_0) + d_g(p_0,q) \Rightarrow$ "$=$" $\boxed{\text{B}}$

<u>Satz 15.3</u> Sei (M,g) zusammenhängend. Dann gilt:

a) Ist für ein $p \in M$ die Exp-Abb $\exp_p$ auf ganz T_pM definiert, so ex für alle $q \in M$ eine Geodätische $\hat{\gamma}$ von p nach q

mit $L_g(\gamma) = d_g(p,q)$

(dh in diesem Fall Geod $\Leftrightarrow$ Kürzeste)

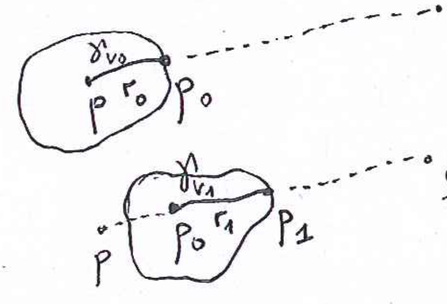
b) Ist (M,g) geod. vollständig, so können zwei beliebige Punkte in M durch eine Geodätische (die gleichzeitig die Kürzeste! ist) verbunden werden.

<u>Beweis:</u> (a) Seien $p, q \in M$, $p \neq q$.
Falls $d(p,q) < \operatorname{inj}(p)$, dh q liegt innerhalb des Inj-Bereichs, und nach Satz 14.7 ex. eindeutige Geodäte γ_v mit $\gamma_v(0) = p$, $\gamma_v(d(p,q)) = q$, die gleichzeitig die Kürzeste ist, also
$$d(p,q) = L(\gamma).$$

Sei nun $d(p,q) > \operatorname{inj}(p)$. Nach Lemma 15.3 $\exists\, p_0 \in \partial B_{r_0}(p)$ für $r_0 \in (0, \operatorname{inj}(p))$ s.d.:
$$d(p,q) = \underbrace{d(p,p_0)}_{=r_0} + d(p_0,q)$$

$d(p,p_0)$ wird durch eine Geodätische γ_{v_0} realisiert, $\|v_0\| = 1$.

<u>Iterativ:</u>



q $\quad d(p,q) = \underbrace{d(p,p_0)}_{r_0} + d(p_0,q)$

q $\quad d(p_0,q) = \underbrace{d(p_0,p_1)}_{r_1} + d(p_1,q)$

Man denkt, man könnte so iterativ nach q gelangen, aber es ist möglich, dass $\sum_{i \geq 0} r_i < d(p,q)$. *

$$\Rightarrow d(p,p_0) + d(p_0,p_1) + d(p_1,q) = d(p,q)$$
$$\leq d(p,p_1) + d(p_1,q)$$
$$\leq d(p,p_0) + d(p_0,p_1) + d(p_1,q)$$
$$\Rightarrow d(p,p_1) = d(p,p_0) + d(p_0,p_1) = r_0 + r_1$$

dh die Kürzeste Verbindung zwischen p, p_1 wird durch $\gamma_{v_0} \cup \gamma_{v_1}$ realisiert.

⌈ denn per Konstr-n $L(\gamma_{v_0}) = d(p,p_0)$
$L(\gamma_{v_1}) = d(p_0,p_1)$ ⌋.

Da Kürzeste keine Knickstellen haben (Kürzeste $\Rightarrow$ Geodätische) ist $\gamma_{v_0} \cup \gamma_{v_1}$ ~~Geodätische~~ kürzeste Geodätische, glatt

$$\Rightarrow \dot{\gamma}_{v_0}(r_0) = v_1 \; ; \; p_1 = \gamma_{v_0}(r_0 + r_1)$$

Setze nun $I := \{ t \in \mathbb{R} \mid d(p,q) = t + d(\gamma_{v_0}(t), q) \}$

- $I \neq \emptyset$ denn mit obigem Argument $r_0, r_0 + r_1 \in I$
- I ist abgeschlossen und nach oben beschränkt, $\max I \leq d(p,q)$
- $\max I = d(p,q)$, denn falls $\max I \lneq d(p,q)$ kann man mit obigem Argument wieder die Geodätische weiter verlängern und erhält $\tilde{r} > \max I, \tilde{r} \in I$ ↯

$$\Rightarrow \max I = d(p,q)$$
$$\Rightarrow L(\gamma) = d(p,q) \quad \blacksquare$$

zu b): ~~[illegible]~~ Es folgt aus $\gamma_{\alpha v}(t) = \gamma_v(\alpha t)$ dass

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \text{alle Geodätischen} & & \exp_p \text{ ist auf} \\ \text{sind auf ganz } \mathbb{R} & \Longleftrightarrow & \text{ganz } T_pM \text{ definiert,} \\ \text{definiert} & & \text{dh } \mathcal{U}_p = T_pM \text{ für alle } p \in M \end{array}}$$

Dann folgt b) direkt aus a). ☒

Theorem 15.4 (Hopf-Rinow)

Sei (M,g) zusammenhängend. Dann sind folgende Aussagen äquiv.

(1) (M,g) ist geodätisch vollständig

(2) $\forall p \in M : \mathcal{U}_p = T_pM$, dh $\exp_p$ ist auf ganz T_pM definiert

(3) Es existiert ein $p_0 \in M$ s.d. $\exp_{p_0}$ auf ganz $T_{p_0}M$ def. ist.

(4) Jede abgeschlossene und beschränkte Menge K im metrischen Raum (M, d_g) ist kompakt.

(5) Der metrische Raum (M, d_g) ist vollständig.

Beweis: $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$ ist klar.

$(3) \Rightarrow (4)$ Betrachte $p \in M$, s.d. $\exp_p$ auf ganz T_pM def. ist.

Sei $K \subset M$ abgeschl. & beschränkt. Da K beschränkt, $\exists R > 0$

$$K \subset \exp_p(\overline{B_R(0)}) \quad \text{nach Satz 15.3.}$$

$$\Rightarrow K' := \exp_p^{-1}(K) \cap \overline{B_R(0)} \subset T_pM$$

- abgeschlossen, da K abg., $\exp_p$ stetig.
- beschränkt, da $\overline{B_R(0)}$ beschränkt.

Auf endlich-dim. Räumen (zB auf T_pM) sind Normen (zB die Eukl. Norm, und $\|\cdot\|_g$) äquivalent und daher ist K' kompakt.

K' kompakt $\Rightarrow$ $K = \exp_p(K')$ ebenfalls kpt. $\square$

$(4) \Rightarrow (5)$: Sei (p_n) Cauchy-Folge in (M, d_g).

Zzg. sie konvergiert in M.

(p_n) Cauchy $\Rightarrow \exists R>0 : \forall n \in \mathbb{N} : \; p_n \in \overline{B_R^{d_g}(p_1)}$

(dh. Folge ist im R-Ball um p_1 bzgl d_g).

Nach (4) ist $\overline{B_R^{d_g}(p_1)}$ kompakt $\Rightarrow (p_n)$ besitzt konv. TF

$\Rightarrow (p_n)$ muss selbst konv. $\square$

$(5) \Rightarrow (1)$: Sei $p \in M$, $v \in T_pM$. $\gamma_v : (a,b) \to M$

(a,b) max. Existenzbereich, $0 \in (a,b)$; $a,b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

<u>Widerspruchsannahme</u>: $b \underset{\neq}{<} +\infty$.

$\rightarrow$ $q_j := \gamma_v(b - \frac{1}{j})$ ist Cauchy nach Konstruktion.

$\Rightarrow$ wegen (5) konvergiert sie gegen $q_\infty \in M$.

$\rightarrow$ $v_j := \dot{\gamma}_v(b - \frac{1}{j}) \in T_{q_j}M$; $\|v_j\|_{q_j} = \|v\|_p$ (dh nach Identif. kpt)

$\Rightarrow$ Es existiert eine konv. TF v_{j_k} die gegen $v_\infty \in T_{q_\infty}M$ konv.

$\rightarrow$ ~~Betrachte nun q_∞ / v_∞ eine Geodätische γ_∞ $(-\varepsilon,\varepsilon) \to M$~~

Nach Existenztheorie gewöhnlicher DGL ex. für $v_\infty \in TM$ eine offene Umgebung $\hat{\mathcal{U}} \subset TM$ und $\varepsilon > 0$ s.d.

$$\forall \omega \in \hat{\mathcal{U}} : \text{Geod } \gamma_\omega \text{ ex. auf } (-\varepsilon, \varepsilon).$$

(dh. solange wir Anfangsdaten nur wenig wackeln, kann man Existenz auf einem festen $(-\varepsilon,\varepsilon)$ garantiere)

Sei $j_0 >> 0$ groß genug s.d. $v_{j_0} \in \hat{\mathcal{U}}$ und $\frac{1}{j_0} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Dann ist $\gamma_{v_{j_0}}$ auf $(-\varepsilon, \varepsilon)$ definiert und setzt damit γ_v auf $(a, b + \frac{1}{2}\varepsilon)$ fort $\lightning$

Widerspruch $\Rightarrow b = \infty$. Analog $a = -\infty$. $\boxtimes$

Korollar 15.5 a) Kompakte Riemannsche Mfk
b) Abgeschlossene Unter'Mfk (mit induz. g)
(zB. check Thm 15.4 (4)) sind vollständig / geodätisch vollständig.

Korollar 15.6 Sei (M, g) eine vollständige Riem. Mfk und $\gamma_v : \mathbb{R} \to M$ Geodätische. Dann gilt:

1) Existiert keine! Kürzere Geod. zwischen $\gamma_v(a)$ und $\gamma_v(b)$ dann ist $\gamma_v|_{[a,b]}$ Kürzeste. [dh γ_v ist auch lokal Kürzeste]

2) Existiert eine weitere Geod. $\gamma_{\tilde v}$ mit

$\gamma_v(a) = \gamma_{\tilde v}(a)$  $\gamma_v(b) = \gamma_{\tilde v}(b)$

und $L(\gamma_v|_{[a,b]}) \geq L(\gamma_{\tilde v}|_{[a,b]})$

Dann ist für alle $\varepsilon > 0$: $\gamma_v|_{[a, b+\varepsilon]}$ nicht mehr Kürzeste!

[dh. γ_v ist keine globale Kürzeste, dieser Begriff nun explizit gemacht]

Beweis: (1) Hopf-Rinow $\Rightarrow$ Es ex. Geod. zwischen $\gamma_v(a)$; $\gamma_v(b)$ die den Abstand realisiert (Satz 15.3 (a)).

(2) Ü. $\boxtimes$

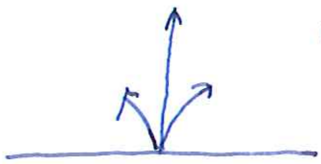
§ 16. Jakobifelder

Wir haben gesehen, dass wir mittels der Exponentialabbildung zu einem gegebenen Vektor eine Geodätische in diese Richtung erhalten. Nun wollen wir quantifizieren, wie sich diese Geodätischen ändern, wenn wir den Richtungsvektor variieren.

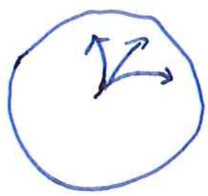
Intuition pos. Krümmung:

S^2

neg. Krümmung



$\mathbb{H}$



Wir erwarten also, dass die Krümmung eine Rolle spielt!

Def 16.1 (Jakobifelder und Variationen)

a) Ist $c: [0,l] \to (M,g)$ eine Geodätische, so heißt $J \in \mathcal{V}_c$ Jakobifeld (längs c), falls

$$J''(t) := \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial t} J(t) + R(J(t), \dot{c}(t))\,\dot{c}(t) \equiv 0.$$

b) Ist $H: [0,\varepsilon] \times [0,l] \to M$, $(s,t) \mapsto H(s,t)$ differenzierbar, so spricht man von einer Variation der Anfangskurve

$c(t) = H(0,t)$, $t \in [0,l]$.

Das Vektorfeld $S = \frac{\partial}{\partial s} H \in \mathcal{V}H$ bzw.

$$S(t) = \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{(0,t)} \in \mathcal{V}c$$

heißt Variationsvektorfeld.

Lem 16.2 Ist $c : [0,\ell] \to M$ Geodätische, so gibt es für alle $(v,w) \in T_pM \times T_pM$, $p = c(0)$ genau ein Jacobifeld J längs c mit

$$J(0) = v \quad \text{und} \quad J'(0) = w.$$

Weiterhin ist die Zuordnung $(v,w) \mapsto J(v,w)$ ein Vektorraumisomorphismus.

Beweis. Es sei $X_0, \dots, X_{n-1} \in \mathcal{V}_c$ eine Basis von parallelen Vektorfeldern längs c mit $X_0(0) = \lambda \dot{c}(0)$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ und

$$g(X_j(0), X_i(0)) = \delta_{ij}.$$

Insbesondere gilt damit für alle $t \in [0,\ell]$ $g(X_i(t), X_j(t)) = \delta_{ij}$.

Ist nun $Y \in \mathcal{V}_c$, so gilt

$$Y(t) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i(t)\, X_i(t),$$ mit $y_i : [0,\ell] \to \mathbb{R}$ glatte Funktionen gegeben durch $y_i(t) = g(Y(t), X_i(t))$ für $i = 0, \dots, n-1$.

Schreibe $Y'(t) = \frac{\nabla}{\partial t} Y(t)$, $Y''(t) = \frac{\nabla}{\partial t}\frac{\nabla}{\partial t} Y(t)$.

Es sei $R(t)$ ~~[illegible]~~ die darstellende Matrix des Endomorphismus

$$T_{c(t)}M \to T_{c(t)}M$$
$$v \mapsto R(v, \dot{c}(t))\dot{c}(t)$$

bezüglich der Basis $X_0(t), \dots, X_{n-1}(t)$. ~~[illegible]~~

Es gilt $R(t) \in \mathrm{Sym}_n \mathbb{R}$, denn wegen

$$g(R(v, \dot{c}(t))\dot{c}(t), w) = g(R(\dot{c}(t), w)v, \dot{c}(t))$$
$$= g(R(w, \dot{c}(t))\dot{c}(t), v)$$

ist R selbstadjungiert.

Es gilt nun: Y ist ein Jacobifeld genau dann,

wenn
$$\begin{pmatrix} Y_0''(t) \\ \vdots \\ Y_{n-1}''(t) \end{pmatrix} + R(t) \begin{pmatrix} Y_0(t) \\ \vdots \\ Y_{n-1}(t) \end{pmatrix} \equiv 0 \qquad (*) \qquad ü$$

Dies ist eine lineare DGL 2. Ordnung und wie immer liefern entsprechende Existenz- und Eindeutigkeitssätze die Behauptung.

$\square$

Bem 16.3 Da c Geodätische ist, gilt

$\frac{\nabla}{\partial t} X_0(t) = \frac{\nabla}{\partial t} \lambda \dot{c}(t) = 0$. Überdies ist $R(t)$ symmetrisch

und damit folgt
$$R(t) = \begin{pmatrix} 0 & - & 0 \\ | & * & \\ 0 & & \end{pmatrix}.$$

Lem 16.4 Der Lösungsraum von $(*)$ spaltet auf als

$\{Y \mid Y\ \text{JF mit } Y(t) = \lambda(t)\dot{c}(t)\} \oplus \{Y \mid Y\ \text{JF mit } g(\dot{c}, Y) \equiv 0\}$

$(2\text{-dim}, \Leftrightarrow Y_1 = \dots = Y_{n-1} = 0) \qquad (2(n-1)\,\text{dim}, \Leftrightarrow Y_0 = 0)$.

Mit Bem 15.3 können wir den ersten Summanden auch durch

$$\{Y \mid Y(t) = \lambda(t)\dot{c}(t) \text{ und } Y''(t) \equiv 0\}$$

beschreiben.

Satz & Def 16.5 Wir definieren $\widetilde{TM} \subset TM$ als den maximalen Definitionsbereich von exp. Es gilt:

- $\widetilde{TM}$ ist offen
- $\widetilde{T_pM} = T_pM \cap \widetilde{TM}$ ist sternförmig um 0_p
- $0_p \in \widetilde{TM}$ für alle $p \in M$.

} siehe 14.1

Schreibweise: Für das Differential einer Funktion f schreiben wir auch f_* und entsprechend $f_{*p} = df_p$.

Satz 16.6 (Differential von exp)

a) Ist $p \in M$, $v \in \widetilde{TM}$, so gilt

$$\exp_{p*v} : T_v \widetilde{T_pM} \cong T_pM \longrightarrow T_{\exp_p(v)} M$$
$$w \longmapsto J(1) = \exp_{p*v}(w),$$

wobei J Jacobifeld längs $c(t) = \exp_p(tv)$ ist mit $J(0) = 0$, $J'(0) = w$.

b) Ist $v \in \widetilde{TM}$, so gilt

$$\exp_{*v} : T_v \widetilde{TM} \longrightarrow T_{\exp(v)} M$$
$$w \longmapsto \exp_{*v}(w) = J(1),$$

wobei $H \in \widetilde{TM}$ Kurve mit $H'(0) = w$ ($\Rightarrow H(0) = v$), J Jacobifeld längs c mit $J(0) = \dot\gamma(0)$ und $J'(0) = \frac{D}{\partial s} H(0)$, wobei $\gamma(s) \in M$ die Projektion (Fußpunktkurve!) von $H(s)$ ist, also $H \in \mathcal{V}_\gamma$.

Beweis. Es ist also $H(s)$ Kurve in $\widetilde{TM}$ mit $H(0) = v$, $H'(0) = w$. Damit ist $V(s,t) = \exp(tH(s))$ eine Variation von c und für festes s ist $V(s,t)$ eine Geodätische in t.

Setze: $$S(s,t) := V_{*(s,t)} \frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{(s,t)} V \in T_{V(s,t)} M$$
$$T(s,t) = V_{*(s,t)} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{(s,t)} V$$

Unser Ziel ist die Berechnung von $S(0,1) = \exp_{*v}(H'(0))$.

Da $v(s,\cdot)$ Geodätische, gilt $\frac{\nabla}{\partial t} T(s,t) = 0$. Also

$$0 = \frac{\nabla}{\partial s}\frac{\nabla}{\partial t} T(s,t) = \frac{\nabla}{\partial t}\frac{\nabla}{\partial s} T(s,t) + R(S,T)T$$
$$= \frac{\nabla}{\partial t}\frac{\nabla}{\partial t} S(s,t) + R(S,T)T$$
$$= S''(s,t) + R(S,T)T.$$

Setze $J(t) = S(0,t)$. Dann gilt $J''(t) + R(J(t),\dot{c}(t))\dot{c}(t) = 0$.

Anfangsbedingung für $J(t)$:

$$J(0) = S(0,0) = \frac{d}{ds}\exp(0\cdot H(s)) = \frac{d}{ds}\gamma(s) = \gamma'(0)$$
$$J'(0) = \frac{\nabla}{\partial t} S(0,0) = \frac{\nabla}{\partial s} T(0,0) = \frac{\nabla}{\partial s} H(0).$$

a) folgt aus dem Allgemeinen Fall, in dem man für H eine Kurve wählt mit $H(t) \in T_pM$ für alle t. $\square$

Wir haben in Satz 11.2 gesehen: In einer Umgebung U von einem Punkt p gilt $R \equiv 0$ genau dann, wenn M in der Nähe von p isometrisch zu $\mathbb{R}^n$ ist. Tatsächlich können wir hierfür exp benutzen und erhalten folgendes Korollar:

<u>Kor 16.7</u> In einer Umgebung U von $p \in M$ sind äquivalent:

a) $R \equiv 0$

b) $\forall p \in U\ \exists \varepsilon > 0$, so dass $\exp_p|_{B_\varepsilon(0,p)}$ eine Riem. Isometrie auf das Bild ist

c) $\forall p \in U$ ex. Umgebung V von p in U, $V' \subset \mathbb{R}^n$ und eine Riemannsche Isometrie $\iota: U \to V'$.

Beweis. a) $\Leftrightarrow$ c) Satz 11.2. Zeige a) $\Rightarrow$ b);

b) $\Rightarrow$ c) ist klar.

Wähle $\varepsilon > 0$ so, dass $\exp|_{B_\varepsilon(0_p)}$ ein Diffeo auf das Bild ist. Sei $v \in B_\varepsilon(0_p) \subset T_pM$, $u, w \in T_pM$.

$$g(\exp_{p*v}(w), \exp_{p*v}(u)) \qquad (\in T_{\exp(v)}M)$$

$$= g(J_w(1), J_u(1)),$$

wobei J_X Jacobifeld längs c mit $J_X(0) = 0$, $J_X'(0) = X$, und c ist $c(t) = \exp(tv)$.

Wegen $R \equiv 0$ gilt $J_X''(t) = -R(J_X, \dot c)\dot c \equiv 0$, somit ist $J_X(t) = t X_X(t)$, wobei $X_X(t)$ Parallele mit $X_X(0) = X$.

$$\Rightarrow g(J_w(1), J_u(1)) = g(X_w(1), X_u(1)) = g(X_u(0), X_w(0))$$

$$= g_p(u, w).$$

$\square$