Prof. Dr. B. Vertman
M. Wunderlich

WS 2015/2016
WWU Münster

Übungen zur Funktionentheorie
Serie 9

Aufgabe 34 (5 Punkte)**.** Zeigen Sie: Die Gammafunktion erfüllt die Funktionalgleichung

$$z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)\ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Ferner sei F meromorph auf $\mathbb{C}$ mit

i) F ist holomorph auf $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$

ii) $zF(z) = F(z+1)$ für alle $z \in \mathbb{C}$

iii) $|F(z)|$ ist beschränkt auf $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 2\}$.

Zeigen Sie, dass dann ein $c \in \mathbb{C}$ existiert mit $F(z) = c\Gamma(z)$.

Hinweis. Wählen Sie für c einen geeigneten Funktionswert von F. Betrachten Sie die Differenz $\Phi(z) = F(z) - c\Gamma(z)$, und zeigen Sie dass Φ i) bis iii) erfüllt. Was können Sie über die Funktion $\Phi(z+1)/z$ im Punkt $z = 0$ sagen? Benutzen Sie schließlich Periodiziät und Beschränkheit der Funktion $\Psi(z) = \Phi(z)\Phi(1-z)$, um die Aussage zu folgern.

Aufgabe 35 (5 Punkte)**.** Seien $\varphi_N : \mathbb{C} \to \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} =: U_N$, $\varphi_S : \mathbb{C} \to \mathbb{S}^2 \setminus \{S\} =: U_S$ die Umkehrabbildungen der stereographischen Projektion. Zeigen Sie, dass der Kartenwechsel

$$\varphi_N^{-1} \circ \varphi_S : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

holomorph ist, d.h. $\{(U_N, \varphi_N), (U_S, \varphi_S)\}$ bildet einen holomorphen Atlas.

Aufgabe 36 (5 Punkte)**.** Beweisen Sie Lemma 14.2 aus der Vorlesung: Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{M}(U)$, $z_0 \in U$.

1) Ist z_0 hebbar oder f an z_0 holomorph, so gilt $\mathrm{Res}(f, z_0) = 0$.

2) Ist z_0 Polstelle erster Ordnung, so gilt

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = (z - z_0) f(z)\Big|_{z=z_0}.$$

3) Ist z_0 Polstelle m-ter Ordnung, so gilt

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{(m-1)} (z - z_0)^m f(z)\Big|_{z=z_0}.$$

Aufgabe 37 (5 Punkte)**.** Zeigen oder widerlegen Sie:

a) Seien $f, g : B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph und haben jeweils eine wesentlicher Singularität bei z_0. Dann hat auch das Produkt $f \cdot g : B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ eine wesentliche Singularität bei z_0.

b) Sei $h : B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph, nullstellenfrei und habe eine wesentliche Singularität in z_0. Dann besitzt auch $1/h : B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ eine wesentliche Singularität bei z_0.

Beweisen Sie:
Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ reell stetig differenzierbar und existiert eine Teilmenge $\tilde{G} \subset G$ welche dicht in G liegt, so dass f in jedem Punkt von $\tilde{G}$ komplex differenzierbar ist, so ist f bereits auf G holomorph.

Hinweis. Betrachten Sie die Teilmenge $S = \{z \in G \mid f \text{ ist holomorph in } z\} \subset G$ und zeigen Sie, dass diese offen und abgeschlossen in G ist.

***Aufgabe 38** (5 Punkte)**.** a) Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil der Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \pi i e^{iz}$.

b) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $u_{a,b,c} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $(x, y) \mapsto ax^2 - 2bxy + cy^2$. Bestimmen Sie alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ so, dass $u_{a,b,c}$ der Realteil einer holomorphen Funktion g ist und bestimmen Sie g.

***Aufgabe 39** (5 Punkte)**.** Bestimmen Sie die Konvergenzradien folgender Reihen:

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1-\pi i}{\sqrt{3}} \frac{z^k}{k^k}$

b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k^3 - i} (z - \sqrt{2} i)^k$

c) $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-3)$, wobei P die Potenzreihenentwicklung im Entwicklungspunkt $z_0 = 3$ der Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{\pm \pi i\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{\sin^2(z) - \cos(z)}{(z^2 + \pi^2)^4}$$

sei.

***Aufgabe 40** (5 Punkte)**.** a) Bestimmen Sie alle ganzen Funktionen, welche 4-Lipschitz-stetig sind.

b) Sei $f \to \mathbb{R}$ stetig und besitze eine holomorphe Fortsetzung F auf $\{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im}(z)| < 1\}$. Zeigen Sie, dass dann $\overline{F}(z) = F(\overline{z})$ gilt.

***Aufgabe 41** (5 Punkte)**.** Zeigen oder widerlegen Sie:

a) Die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) := \frac{1}{2\pi i} e^{i|z|^2}$ ist holomorph.

b) Die durch $z \mapsto |\cos(z)|$ gegebene Funktion ist unbeschränkt.

c) Die Funktion $\sin(\frac{1}{z}) : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ ist meromorph.

***Aufgabe 42.** Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, schreibe $u = \mathrm{Re}(f)$, $v = \mathrm{Im}(f)$. Welche Aussage ist wahr, welche ist falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Nimmt die Funktion $u^2 + v^2$ in G ein Minimum an, so ist f konstant.

b) Angenommen es gibt ein $R > 0$ so, dass $G \subset B_R(0)$. Dann ist f beschränkt.

c) Gibt es $\xi \in \mathbb{R}$ mit $|f(z)| < \xi$ für alle $z \in G$, so ist f konstant.

***Aufgabe 43.** Sei $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

a) $(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))^n = \cos(n\alpha) + i\sin\alpha)^n$

b) $\cos(3\alpha) = \cos^3(\alpha) - 3\sin^2(\alpha)\cos(\alpha)$

***Aufgabe 44** (5 Punkte)**.** Berechnen Sie:

a)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$$

b)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - 4x}{(x^2+3)(x^4+2)} dx$$

c)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ix)}{x^2+2} dx$$

***Aufgabe 45** (5 Punkte)**.** Berechnen Sie:

a)
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=2} \frac{1}{(z-1)^2} dz$$

b)
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=4} \frac{1}{z^2 + 2z - 8} dz$$

c)
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=2\pi} \frac{\cos(z) + 1}{z - \pi} dz$$

d)
$$\int_{|z|=3} \frac{1}{(z-2)^n (z-4)^m} dz, \; n, m \in \mathbb{N}$$

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Freitag, den 8. Januar 2016, um 10.00 Uhr, in den Briefkästen im Hörsaalgebäude.

Wir wünschen Ihnen besinnliche Feiertage und einen guten Rutsch in das neue Jahr!