Prof. Dr. Boris Vertman
M. Sc. Artem Nepechiy Wintersemester 2014

# Geometrische Analysis

## Blatt 7

**Aufgabe 1.** (5 Punkte)

Berechne
$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{1}{ix+\varepsilon}-\frac{1}{ix-\varepsilon}\right) \quad \text{in } \mathscr{D}'(\mathbb{R}).$$

**Aufgabe 2.** (5 Punkte)

Sei $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, und setze $\langle \varphi T, \psi\rangle := \langle T, \varphi\psi\rangle$. Zeige
$$\varphi T \in \mathscr{D}'(\Omega).$$

**Aufgabe 3.** (5 Punkte)

Sei $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$, $\Omega = \bigcup_{i\in I} U_i$, $U_i \subset \mathbb{R}^n$ offen. Zeige:

(i) Falls $T|_{U_i} = 0$ für alle $i \in I$, dann ist $T = 0$.

(ii) Falls $T|_{U_i}$ glatt ist für alle $i \in I$, dann ist $T$ glatt.

**Aufgabe 4.** (5 Punkte)

(i) Zeige für die Deltadistribution $\delta = \delta_0$, dass $\delta = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{i\langle x,\xi\rangle} d\xi$ im Sinne oszillatorischer Integrale.

(ii) Schreibe $D^\alpha\delta$, $\alpha$ ein Multiindex, als ein oszillatorisches Integral, und zeige, dass $\operatorname{sing\,supp}(D^\alpha\delta) = \{0\}$.

(iii) Sei $f \in C^\infty(\Omega)$, $\operatorname{Im} f \geq 0$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen), $\varepsilon > 0$. Zeige
$$\frac{1}{f(x)+i\varepsilon} = \frac{1}{i}\int_0^\infty e^{i(f(x)+i\varepsilon)\tau} d\tau.$$

(iv) Ausserdem sei $df(x) \neq 0$ falls $f(x) = 0$. Zeige
$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{f(x)+i\varepsilon} = \frac{1}{i}\int_0^\infty e^{if(x)\tau} d\tau \quad \text{in } \mathscr{D}'(\mathbb{R}).$$
Führe $1 = \chi(\tau) + (1-\chi(\tau))$ ein, mit $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\chi(\tau) = 0$ für $\tau \leq 0$ und $\chi(\tau) = 1$ für $\tau \geq 1$, um dem Integral eine Bedeutung zu geben.

(v) Was ist $\operatorname{sing\,supp}\left(\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{1}{f(x)+i\varepsilon}\right)\right)$?

(vi) Folgere hieraus, dass
$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{1}{ix+\varepsilon}-\frac{1}{ix-\varepsilon}\right) = 2\pi\delta \quad \text{in } \mathscr{D}'(\mathbb{R}).$$

**Aufgabe 5.** (5 Punkte)

Sei $s > \frac{p}{2} + k$. Zeigen Sie: Die Abbildung
$$\delta : \mathbb{R}^p \to H^{-s}(\mathbb{R}^p), a \mapsto \delta_a$$
ist $k$-mal stetig differenzierbar.