Prof. Dr. Boris Vertman
M. Sc. Artem Nepechiy

Wintersemester 2014

# Geometrische Analysis

## Blatt 12

**Aufgabe 1.** (5 Punkte)

Seien $X, Y, Z$ Banach-Räume und $T\colon X \to Y$, $S\colon Y \to Z$ Fredholm Operatoren. Es bezeichnen

$$\pi_T\colon Y \to Y/T(X) \quad \text{und} \quad \pi_S\colon Z \to Z/S(Y)$$

die natürlichen Projektionen. Zeige, dass die folgende Sequenz exakt ist:

$$0 \to \ker T \hookrightarrow \ker ST \xrightarrow{T} \ker S \xrightarrow{\pi_T} \operatorname{coker} T \xrightarrow{S} \operatorname{coker} ST \xrightarrow{\pi_S} \operatorname{coker} S \to 0.$$

Man beachte, dass $S$ in natürlicher Weise einen Operator $\operatorname{coker} T \to \operatorname{coker} ST$ sowie $\pi_S$ einen Operator $\operatorname{coker} ST \to \operatorname{coker} S$ induziert.

Folgere nun, dass $ST$ ebenfalls Fredholmsch ist und dass

$$\operatorname{ind}(ST) = \operatorname{ind}(S) + \operatorname{ind}(T).$$

**Aufgabe 2.** (5 Punkte)

Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir setzen für $s \in \mathbb{R}$:

$$H^s_{\text{comp}}(X) := H^s(\mathbb{R}^n) \cap \mathscr{E}'(X) \qquad \text{sowie}$$
$$H^s_{\text{loc}}(X) := \{T \in \mathscr{D}'(X) \mid \varphi T \in H^s_{\text{comp}}(X) \text{ für alle } \varphi \in \mathscr{D}(X)\}.$$

(i) Versehe $H^s_{\text{comp}}(X)$ und $H^s_{\text{loc}}(X)$ mit geeigneten lokalkonvexen Topologien (in größtmöglicher Analogie zu $H^s(\mathbb{R}^n)$!) so, dass via dem $L^2$-Skalarprodukt $H^s_{\text{loc}}(X)$ der (Anti-)Dualraum von $H^{-s}_{\text{comp}}(X)$ wird.

(ii) Ist $A \in L^m(X)$, so induziert $A$ eine stetige lineare Abblildung $H^s_{\text{comp}}(X) \to H^{s-m}_{\text{loc}}(X)$. Was kann man darüber sagen, wenn $A$ eigentlich getragen ist?

(iii) Erkläre $H^s_{\text{comp}}(M)$ und $H^s_{\text{loc}}(M)$ für eine beliebige differenzierbare Mannigfaltigkeit und übertrage (i) und (ii) entsprechend. Die Definition sollte natürlich so sein, dass für eine geschlossene Mannigfaltigkeit $M$ gilt

$$H^s_{\text{comp}}(M) = H^s_{\text{loc}}(M) = H^s(M).$$

Bitte umblättern.

**Aufgabe 3.** (5 Punkte)

Sei $H$ ein Hilbertraum und $T\colon H \to H$ ein beschränkter linearer Operator.

Zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) $T$ ist ein Fredholm Operator.

(ii) $\dim \ker T, \dim \ker T^* < \infty$, und $T$ ist nach unten beschränkt, d.h. es existiert $\varepsilon > 0$ so, dass für alle $x \in \ker T^\perp$ gilt $\|Tx\| \geq \varepsilon \|x\|$.

(iii) $T^*T$ ist ein Fredholm-Operator.

**Aufgabe 4.** (5 Punkte)

Seien $T_j \in B(H_j)$, $j = 1, 2$, Fredholm-Operatoren auf den Hilbert-Räumen $H_1$, $H_2$. Zeige, dass durch

$$T_1 \# T_2 = \begin{pmatrix} T_1 \otimes I_2 & -I_1 \otimes T_2^* \\ I_1 \otimes T_2 & T_1^* \otimes I_2 \end{pmatrix}$$

ein Fredholm-Operator auf $H_1 \widehat{\otimes} H_2 + H_1 \widehat{\otimes} H_2$ definiert wird mit

$$\operatorname{ind}(T_1 \# T_2) = \operatorname{ind}(T_1) \operatorname{ind}(T_2).$$

Das *Hilbertraumtensorprodukt* $H_1 \widehat{\otimes} H_2$ ist die Vervollständigung des algebraischen Tensorprodukts $H_1 \otimes H_2$ bezüglich des Skalarprodukts

$$(x_1 \otimes x_2, y_1 \otimes y_2) := (x_1, y_1)_{H_1} (x_2, y_2)_{H_2}.$$