F Fehlerrechnung

Inhalt

F.1 Einleitung **11**
F.2 Was kann schiefgehen? **12**
F.3 Wie bestimmt man Messunsicherheiten? . . **13**
F.3.1 Fehler einer einzelnen Messung 13
F.3.2 Fehler einer Messreihe 13
F.3.3 Fehler eines abgeleiteten Ergebnisses: Fehlerfortpflanzung 14
F.4 Absolute und relative Fehler **17**
F.4.1 Eine praktische Formel 17
F.5 Etwas Hintergrundwissen zur Statistik **17**
F.6 Fehlerbalken **18**

F.1 Einleitung

Wenn man etwas misst, ist das Ergebnis nie ganz genau. Das erwartet auch niemand, und im Alltag gehen wir damit ganz intuitiv um. Wenn z.B. jemand sagt: »Ich bin der einzige im Team, der nicht zwei Meter groß ist«, würden wir ihn nicht gleich einen Lügner nennen, wenn sich herausstellt, dass einige seiner Teamkolleginnen beispielsweise eine Körpergröße von 199,9 cm haben. Es ist klar, dass die »Messung« nicht auf den Millimeter genau gewesen sein kann, und entsprechend wird die Aussage eingeordnet. Außerdem hängt die Körpergröße davon ab, ob man steht oder liegt, und abends sind manche Menschen 2 cm kürzer als morgens. Wie genau ist die »wahre« Körpergröße also überhaupt definiert?

Im Physikpraktikum messen wir viele verschiedene Größen mit vielen verschiedenen Methoden. Wie genau und belastbar diese Messungen sind, ist sehr unterschiedlich, und davon hängt auch die Qualität der Ergebnisse ab. Gerade bei präzisen Messmethoden ist es wichtig zu wissen, wie präzise das Ergebnis wirklich ist. Der Abstand zwischen Erde und Mond kann z.B. auf 4 mm genau gemessen werden; daher wissen wir auch, dass er sich von Jahr zu Jahr um ca. 3,8 cm vergrößert.

Je präziser ein Messwert ist, desto kleiner ist seine **Messunsicherheit**. Die Messunsicherheit ist ein Maß dafür, wie stark der gemessene Wert vom »wahren« Wert abweichen könnte. Im Physikpraktikum versuchen wir abzuschätzen, wie groß der Einfluss von Abweichungen auf das Ergebnis ist, um eine Messunsicherheit angeben zu können. Diese Abschätzung heißt Fehlerrechnung.

Es ist etwas missverständlich, in diesem Zusammenhang von **Fehlern** zu sprechen – man hat ja nicht unbedingt etwas falsch gemacht –, aber es hat sich eingebürgert und viele Physiker und Ingenieure benutzen im Alltag auch heute noch den alten Begriff »Messfehler« statt »Messunsicherheit«. Der Name »Fehlerrechnung« ist ebenfalls ein Überbleibsel aus diesen alten Zeiten.

Im Rahmen des Praktikums machen wir die Fehlerrechnung nur stark vereinfacht. Inwiefern? Wir behandeln alle Messunsicherheiten gleich, und zwar wie **statistische Unsicherheiten von normalverteilten Größen** – was das bedeutet, wird später erklärt. Das ist eine ziemlich grobe Vereinfachung, aber die Erfahrung zeigt, dass diese Praxis in den meisten Fällen zu aussagekräftigen Ergebnissen führt.

F.2 Was kann schiefgehen?

Statistische Fehler sind Messunsicherheiten, die zufällig auftreten und die Messwerte in beide Richtungen verfälschen können. Sie sind nicht reproduzierbar und nicht nachträglich korrigierbar – aber den Einfluss statistischer Fehler kann man dadurch verringern, dass man die Messung sehr oft durchführt und dann den Mittelwert der Messwerte berechnet.

Systematische Fehler: Die Ursache systematischer Fehler liegt meist direkt im Messgerät oder Messverfahren. Systematische Fehler sind meistens reproduzierbar und lassen sich oft durch eine Anpassung des Aufbaus oder eine Kalibrierung der Messgeräte beheben. Manche systematischen Fehler entstehen aber auch durch Wechselwirkungen zwischen Messgerät und Probe und sind nie ganz vermeidbar.

Grobe Fehler: Beispiele für grobe Fehler sind: das falsche Ende des Thermometers in die Probe stecken, Spannungen messen, wenn man Stromstärken messen sollte (und umgekehrt), einen Teil des Aufbaus bewegen, der nicht bewegt werden sollte (und umgekehrt), Skalen falsch ablesen, drei Minuten mit einem heißen Metallklotz in der Landschaft herumstehen, bevor man ihn in das Kalorimeter steckt – der Phantasie sind keine Grenzen gesetzt. Grobe Fehler sind oft nicht reproduzierbar und selten nachträglich zu beheben. Es ist kein Kraut gegen sie gewachsen und sie sind insbesondere auch nicht Gegenstand der Fehlerrechnung. Aber Mitdenken hilft enorm.

F.3 Wie bestimmt man Messunsicherheiten?

Das kommt auf die Art der Messung an.

F.3.1 Fehler einer einzelnen Messung

Ablesegenauigkeit: Bei vielen Messgeräten (Waagen, Messschieber, Thermometer…) kann man davon ausgehen, dass alle angezeigten Stellen auch präzise sind. Die Ablesegenauigkeit ist dann die kleinstmögliche Differenz zwischen zwei Werten. Beispiel: Eine Waage zeigt Werte in diesem Format an: m = 28,31g. Ablesegenauigkeit: ±0,01g.

Vertrauensbereich nach Herstellerangaben: Manche Messgeräte zeigen aber auch mehr Stellen an, als wirklich sicher sind. Wie groß der Fehler ist, steht dann im Handbuch. Beispiel: Ein Multimeter misst eine elektrische Stromstärke von I = 9,76 mA, das Handbuch nennt in diesem Messbereich eine relative Messunsicherheit von ±2,5%, d.h. der wahre Wert liegt zwischen 9,5 und 10,0 mA.

Persönliche Einschätzung: Eine Stoppuhr kann 1/100 Sekunden messen – aber können Sie so schnell stoppen? Es wird immer wieder Messungen geben, bei denen nicht das Messgerät, sondern seine Bedienung der limitierende Faktor ist. Manchmal müssen Sie den Fehler dann einfach abschätzen.

F.3.2 Fehler einer Messreihe

Manchmal ist es sinnvoll, eine einzelne Messgröße mehrmals zu messen, z.B. die Schwingungszeit eines Pendels. Durch die manuelle Zeitmessung und kleine Unregelmäßigkeiten im Aufbau (Wind etc.) kann der gemessene Wert nach oben oder nach unten vom wahren Wert abweichen (statistischer Fehler). Um den Einfluss dieser Fehlerquellen zu minimieren, wiederholt man die Messung möglichst oft und berechnet dann den Mittelwert, in der Hoffnung, dass die vielen Abweichungen sich gegenseitig aufheben.

Um abzuschätzen, wie genau der Mittelwert einer solchen Messreihe ist, berechnet man ihre Standardabweichung σ_n. Genau genommen gibt es sogar zwei Standardabweichungen, die sozusagen verschiedene Dinge aussagen. Tabelle F.1 bietet einen Überblick dazu.

Dass bei der Definition von σ im Nenner $(n-1)$ steht, ist ein Hinweis darauf, dass es für eine einzelne Messung keine Abweichung vom Mittelwert geben kann und die Definition somit sinnlos wäre. Wenn die Anzahl der Messungen sehr groß ist, kann man $(n-1)$ zu n machen, ohne dass sich dadurch viel ändert.

In Abbildung F.1 repräsentiert die untere Messreihe eine »bessere«, d.h. präzisere Messreihe als die obere, da die einzelnen Messpunkte näher am Mittelwert liegen und die Standardabweichung der unteren Messreihe daher kleiner ist.

Wenn die Standardabweichung einer Messung kleiner wird als die Ablesegenauigkeit der einzelnen Messwerte, ist der Fehler des Mittelwertes die Ablesegenauigkeit! Sonst müsste man nur zweimal zufällig den gleichen Wert messen und könnte gleich argumentieren, dass das Ergebnis

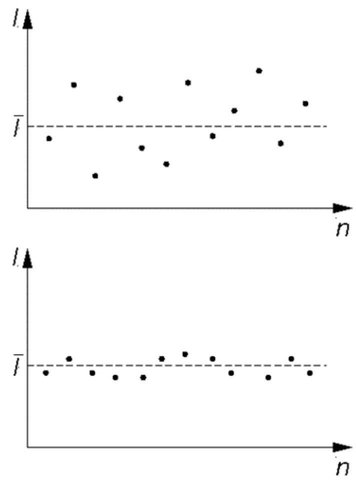

Abbildung F.1: Streuung von Messwerten um einen Mittelwert: oben größere, unten kleinere Streuung.

	Standardabweichung der Einzelmessung σ	Standardabweichung des Mittelwertes σ_n
Beschreibung	Mittlere quadratische Abweichung (vom Mittelwert). Geschätzt 68 % der Messwerte werden höchstens diesen Abstand zum Mittelwert haben.	Mit (geschätzt) 68 %-iger Wahrscheinlichkeit hat der tatsächliche Wert höchstens diesen Abstand vom Mittelwert der Messreihe.
Definition (Messgröße x, n Messungen)	$$\sigma_x = \sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+...+(x_n-\bar{x})^2}{n-1}} \quad \text{(F.1)}$$	$$\sigma_{n,x} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \quad \text{(F.2)}$$
Geringer Wert bedeutet...	... geringe Streuung, kleiner statistischer Fehler bei der Messung.	... kleine Unsicherheit im Ergebnis. Entweder ist der statistische Fehler klein, oder man hat sehr oft gemessen.
Wann benutzen?	Wenn es darum geht, die **Streuung** einer Größe zu charakterisieren. Die Standardabweichung der Einzelmessung sollte (für große n) unabhängig von n sein, d.h. wenn man öfter misst, ändert sie sich nicht mehr. Beispiel: Schrotkugeln streuen um den Mittelpunkt einer Zielscheibe. Je höher die Standardabweichung der Abstände zum Zentrum, desto größer die Flächenwirkung (und desto größer der »Choke«).	Wenn man die **Messunsicherheit für den Mittelwert** einer Messreihe ermitteln will, also bei jeder Auswertung eines Versuches, der mehrmals wiederholt wurde. **Sie sind gerade bei der Fehlerrechnung? Dann brauchen Sie diese Formel.**

Tabelle F.1: Gegenüberstellung der zwei verschiedenen Standardabweichungen.

unendlich genau sein müsste, weil die Standardabweichung null ist.

Wenn einzelne Werte einer Messreihe deutlich vom Rest abweichen (»Ausreißer«), liegt das wahrscheinlich an einem groben Fehler. Was »deutlich« in diesem Zusammenhang heißt, kann man nicht ganz klar definieren; es hängt auch davon ab, wie sehr der Rest der Messreihe streut. Wenn ein »Zahlendreher« wahrscheinlicher ist als ein physikalischer Grund für den ungewöhnlichen Wert, ist es sinnvoll, diesen von der weiteren Auswertung auszuschließen. Das ist nicht »unwissenschaftlich«, **muss aber dokumentiert werden**, siehe dazu das Beispiel auf der nächsten Seite.

F.3.3 Fehler eines abgeleiteten Ergebnisses: Fehlerfortpflanzung

Was ist, wenn das gewünschte Ergebnis erst aus mehreren Messgrößen ausgerechnet werden muss? Die einzelnen Messgrößen sind bekannt, ihre Unsicherheiten auch – dann kann man das Ergebnis ausrechnen, aber wie pflanzen sich die Fehler in das Endergebnis fort? Wir berechnen alle diese Messunsicherheiten mit der Formel für die ***Gaußsche Fehlerfortpflanzung***. Die Berechnung kann etwas aufwendig sein.

Um die Fehlerfortpflanzung für ein Ergebnis zu berechnen, müssen Sie **Ableitungen** berechnen können. Wenn Sie also nicht mehr genau wissen, was eine Ableitung ist und wie man sie berechnet, ist jetzt der richtige Zeitpunkt, um das aufzuarbeiten! Ohne dieses mathematische Vorwissen kann man die Protokolle nicht erstellen.

BEISPIEL
Zwei Studierende haben mehrmals die Schwingungszeit eines Pendels gemessen. Einer der Messwerte wirkt im Nachhinein sehr unplausibel – es ist klar, dass an dieser Stelle ein grober Fehler passiert sein muss, also wird der Wert für die weitere Auswertung nicht berücksichtigt.

i	T_i [s] $\pm 0{,}01\,\mathrm{s}$	
1	2,31	
2	2,33	
3	2,41	
4	2,37	
5	2,40	
6	2,30	
7	2,29	
8	2,35	
9	~~3,31~~	**Ausreißer!** (wird nicht berücksichtigt)
10	2,30	

Mittelwert berechnen:

$$T = \frac{2{,}31\,\mathrm{s} + 2{,}33\,\mathrm{s} + \ldots + 2{,}30\,\mathrm{s}}{9} = 2{,}34\,\mathrm{s}$$

Standardabweichung berechnen:

$$\sigma_{n,T} = \sqrt{\frac{(2{,}31\,\mathrm{s} - 2{,}34\,\mathrm{s})^2 + \ldots + (2{,}30\,\mathrm{s} - 2{,}34\,\mathrm{s})^2}{9 \cdot (9-1)}} = 0{,}015\,\mathrm{s}$$

...und Ergebnis angeben:

$$T = (2{,}34 \pm 0{,}02)\,\mathrm{s}$$

In Ihrem Protokoll müssen Sie diese Schritte natürlich nicht in dieser Ausführlichkeit darstellen, siehe E.4.8. In der Praxis würden Sie zur Berechnung ohnehin Excel-Funktionen benutzen, aber es ist natürlich sinnvoll zu wissen, wie diese funktionieren.

Aus der Schule kennen Sie vermutlich die **Ableitung** einer Funktion mit **einer Variable**, z.B.:

$$f(x) = x^2, \qquad \frac{df}{dx} = 2x$$

Wenn eine Funktion von **zwei Variablen** abhängt, kann man die gleichen Ableitungsregeln, die Sie schon aus der Schule kennen, benutzen, um nach einer dieser Variablen abzuleiten. Die jeweils andere Variable wird dabei einfach wie eine Konstante behandelt:

$$f(x,y) = y^2 \cdot x^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = y^2 \cdot 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \cdot x^2$$

Solche Ableitungen heißen **partielle Ableitungen**, weil sie eben nur eine Variable und nicht alle berücksichtigen. Um das zu verdeutlichen, wird in Formeln für partielle Ableitungen dieses Zeichen benutzt: ∂. Es wird *»d«*

oder zur auch »*del*« ausgesprochen und erinnert an ein d wie in »Differential«.

Nun verstehen wir diese Notation und können uns die Formel für die **Gaußsche Fehlerfortpflanzung** angucken. Wir bestimmen eine Größe y, die von mehreren Variablen $x_1, x_2, \ldots$ abhängt. Dann ist die Messunsicherheit von y gegeben durch:

Eine kleine Eselsbrücke: Diese Formel erinnert etwas an den Satz des Pythagoras in n Dimensionen und mit $\frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta x_i$ als Seitenlängen. So oder so: Man sollte sie sich merken.

$$y = y(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 (\Delta x_1)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 (\Delta x_2)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_n}\right)^2 (\Delta x_n)^2} \qquad \text{(F.3)}$$

BEISPIEL

Für die Schwingungszeit T eines Fadenpendels gilt (bei kleinen Auslenkungen):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \text{(F.4)}$$

Dabei ist l die Länge des Pendels, $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$ die Fallbeschleunigung. Wir haben die Schwingungszeit und die Länge gemessen (wie, ist gerade nicht wichtig). Die Ergebnisse lauten:

$$T = (2{,}57 \pm 0{,}10)\,\mathrm{s}$$

$$l = (1{,}665 \pm 0{,}002)\,\mathrm{m}$$

Daraus kann man nun die Fallbeschleunigung ausrechnen. Wir stellen Gleichung F.4 um und erhalten:

$$g(l,T) = (2\pi)^2 \frac{l}{T^2} = 9{,}9519\,\mathrm{m/s^2}$$

Das ist der erste Teil des Ergebnisses. Aber wie groß ist der Fehler? Wir berechnen die partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial g(l,T)}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{(2\pi)^2}{T^2}\cdot l\right) = \frac{(2\pi)^2}{T^2}$$

$$\frac{\partial g(l,T)}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T}\left((2\pi)^2 l \cdot T^{-2}\right) = (2\pi)^2 l \cdot (-2)\,T^{-3} = -8\pi^2 \frac{l}{T^3}$$

…und setzen sie in die Formel für die Fehlerfortpflanzung ein.

$$\Delta g = \sqrt{\left(\frac{(2\pi)^2}{T^2}\right)^2 (\Delta l)^2 + \left(-8\pi^2 \frac{l}{T^3}\right)^2 (\Delta T)^2} = 0{,}7746\,\mathrm{m/s^2}$$

Diese letzte Rechnung ist leider recht aufwendig. Wenn man lernt, diese Formeln in Excel einzugeben, spart man sich im Verhältnis zur »manuellen« Variante aber eine Menge Tipparbeit und Ärger. Das Ergebnis lautet insgesamt (Fehler immer aufrunden):

$$g = (9{,}96 \pm 0{,}78)\,\mathrm{m/s^2}$$

Der Literaturwert $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$ liegt innerhalb der Fehlergrenzen, das Ergebnis ist also plausibel. Der große Fehler weist aber auf grundlegende Unzulänglichkeiten des Aufbaus hin. In diesem Fall ist es vor allem die Zeitmessung, die mit einem relativen Fehler von $\frac{\Delta T}{T} = 4\,\%$ die Messgenauigkeit verschlechtert. Da T quadratisch in g eingeht, ist der relative Fehler der Erdbeschleunigung sogar $\frac{\Delta g}{g} = 8\,\%$. Wenn man einen Weg findet, die Schwingungsdauer genauer zu messen, verbessert sich dadurch auch die Genauigkeit des Endergebnisses dramatisch.

F.4 Absolute und relative Fehler

Die Fehlerwerte, die bisher vorgekommen sind, waren alles **absolute Fehler**. Absolute Fehler haben eine Einheit, und zwar die gleiche wie die entsprechende Messgröße selbst:

$$l = 1{,}03\,\mathrm{m} \pm 0{,}01\,\mathrm{m}$$

Man kann auch das Verhältnis von (absolutem) Fehler zum Messwert ausrechnen. Das ist der **relative Fehler**:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{0{,}01\,\mathrm{m}}{1{,}03\,\mathrm{m}} = 0{,}0097 = 1\,\%$$

Der relative Fehler ist dimensionslos (hat also keine Einheit), aber es ist üblich, ihn in Prozent anzugeben.

F.4.1 Eine praktische Formel

Es gibt einen **Spezialfall der Fehlerfortpflanzung**, der in der Praxis oft anwendbar ist und die Rechnung erheblich abkürzt. Falls alle Variablen einer Funktion *linear eingehen* – egal, ob über dem Bruchstrich oder darunter – gilt für die relativen Fehler ein Zusammenhang, ohne dass man eine Ableitung berechnen muss:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= const \cdot \frac{x \cdot y}{z} \\ \Rightarrow \left(\frac{\Delta f}{f}\right)^2 &= \left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{z}\right)^2 \end{aligned} \tag{F.5}$$

Man kann diesen Fall sogar noch etwas erweitern:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= const \cdot x^a y^b z^c \\ \Rightarrow \left(\frac{\Delta f}{f}\right)^2 &= \left(a\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(b\frac{\Delta y}{y}\right)^2 + \left(c\frac{\Delta z}{z}\right)^2 \end{aligned} \tag{F.6}$$

F.5 Etwas Hintergrundwissen zur Statistik

Das oben beschriebene Verfahren, welches wir im Physikpraktikum benutzen, um Messunsicherheiten abzuschätzen, beruht auf der sog. **Normalverteilung** oder **Gauß-Verteilung**. Das ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, d.h. es wird – grob gesagt – jedem möglichen Ereignis eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet, mit der es eintreffen kann.[1]

Es gibt noch viele andere Wahrscheinlichkeitsverteilungen für verschiedenste Fälle, aber keine ist so wichtig wie die Gauß-Verteilung. Woher kommt das? Die Gauß-Verteilung ist *invariant gegenüber Faltungen*, was

[1] Die Normalverteilung ist eine kontinuierliche Verteilung, d.h. es gibt unendlich viele Ereignisse, die alle eine unendlich kleine Wahrscheinlichkeit haben. Das macht es etwas komplizierter – wie kommt man von den unendlich kleinen Zahlen zu Werten, die man aufschreiben kann? Das müssen Sie für die Erstellung der Protokolle aber gar nicht können.

konkret bedeutet, dass die Summe von zwei normalverteilten Zufallsgrößen wieder normalverteilt ist. Überlagern sich nun immer mehr verschiedene Zufallsgrößen (die nicht unbedingt normalverteilt sein müssen), wird das Ergebnis einer Normalverteilung immer ähnlicher. Daher kann man Gauß-Verteilungen überall beobachten, wo viele unabhängige Einflussfaktoren vorliegen: bei Klausurergebnissen, Schadenssummen von Verkehrsunfällen, Wetterdaten und natürlich allgegenwärtig bei Messungen von physikalischen, chemischen oder biologischen Parametern.

Die Gauß-Verteilung hat die Form einer »Glockenkurve«, siehe Abb. F.2. Das Zentrum und die Symmetrieachse bildet der **Erwartungswert** μ. Das ist der Wert mit der höchsten Wahrscheinlichkeit. Wie breit die Glocke ist, hängt von der Standardabweichung σ ab. Die Variable x kann jede zufallsverteilte Größe sein, und $f(x)$ ist die einem konkreten Wert zugeordnete Wahrscheinlichkeitsdichte.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

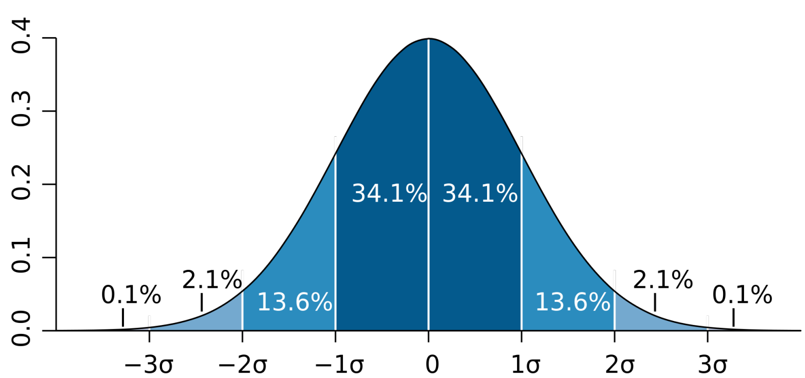

Abbildung F.2: Normalverteilung mit charakteristischen Größen.

Die Fläche unter einem bestimmten Bereich der Glocke steht für die Wahrscheinlichkeit, mit der diese Ereignisse eintreten können. Unabhängig von μ und σ gilt immer: ca. 68 % aller Ereignisse (z.B. aller Messungen) liegen im Bereich zwischen $\mu - \sigma$ und $\mu + \sigma$, also im Abstand von höchstens einer Standardabweichung um den Erwartungswert herum. Analog liegen etwa 95 % aller Ereignisse in einem Abstand von 2σ um den Erwartungswert herum, usw.

F.6 Fehlerbalken

Neben dem Ergebnis einer Messung ist es oft auch nötig, die Genauigkeit des Ergebnisses zu visualisieren. Dafür gibt es verschiedene Möglichkeiten, z.B. Boxcar-Diagramme, Schattierungen um Kurven und viele mehr. Die einfachste Methode für einzelne Messpunkte sind **Fehlerbalken**. Der erste Versuch, für dessen Auswertung Sie ein Diagramm mit Fehlerbalken erstellen sollen, ist die *Temperaturabhängigkeit der Viskosität* (2.6.4). Im Musterprotokoll dazu finden Sie eine Schritt-für-Schritt-Anleitung, wie Sie in Excel Diagramme mit Fehlerbalken erstellen.

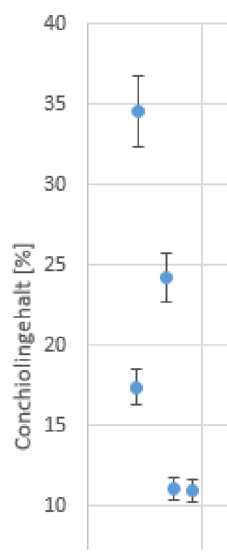

Abbildung F.3: Ausschnitt aus einem Diagramm mit y-Fehlerbalken.