Prof. Dr. B. Vertman
M. Wunderlich

WS 2016/2017
WWU Münster

Übungen zur Differentialgeometrie I
Serie 1

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Verallgemeinern Sie – mittels einer geeigneten Parametrisierung – Definition 2.1 auf reguläre C^2-Kurven, welche nicht notwendigerweise wegparametrisiert sind.

Sei nun $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine solche Kurve.

a) Zeigen Sie, dass gilt:

$$T(t) = \frac{\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|}, \; N(t) = \frac{\dot{T}(t)}{\|\dot{T}(t)\|}, \; \kappa(t) = \frac{\|\dot{T}(t)\|}{\|\dot{c}(t)\|}.$$

b) Zeigen Sie, dass Tangential- und Normalenvektor senkrecht zueinander stehen, d.h. $\langle T(t), N(t)\rangle \equiv 0$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre C^2-Kurve mit $\ddot{c}(t_0) \neq 0$. Zeigen Sie, dass dann $m(t_0) \in \mathbb{R}^n$ der eindeutig bestimmte Punkt mit der Eigenschaft

$$\|m(t_0) - c(t)\| = \frac{1}{\kappa(t_0)} + \mathcal{O}(|t - t_0|^2)$$

ist, d.h. $\|m(t_0) - c(t)\| - \frac{1}{\kappa(t_0)} =: f(t)$ ist eine Funktion mit $\lim_{t\to t_0} \frac{f(t)}{|t-t_0|^2} = 0$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre C^2-Kurve. Zeigen Sie:

a) $\kappa(t) = |\kappa_0(t)|$

b) $\kappa_0(t)$ ändert bei Durchlaufen von c in umgekehrter Richtung das Vorzeichen.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine geschlossene, stückweise C^1-Kurve der Länge L (d.h. es können endlich viele $t_1, \ldots, t_k \in I$ existieren, an denen c nicht differenzierbar ist, jedoch auf die Zusammenhangskomponenten von $I \setminus \{t_1, \ldots, t_k\}$ eingeschränkt ist c C^1).

a) Zeigen Sie, dass $\operatorname{im} c$ enthalten ist in $\overline{B_{L/4}(p)}$ für ein geeignetes p.

b) Wie sieht c aus, wenn kein $r < L/4$ und kein $p \in \mathbb{R}^2$ existiert, so dass $\operatorname{im} c$ in $\overline{B_r(p)}$ enthalten ist?

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Freitag, den 28. Oktober 2016, um 10.00 Uhr, in den Briefkästen im Hörsaalgebäude.