Was ist die Matrixdarstellung von der linearen Abb

$$Df|_p : T_pM_1 \longrightarrow T_{f(p)}M_2$$

bzgl der Basen $T_pM_1 = \left\langle \frac{\partial \varphi_1^{-1}}{\partial x_1}\Big|_{\varphi_1(p)}, \dots, \frac{\partial \varphi_1^{-1}}{\partial x_{n_1}}\Big|_{\varphi_1(p)} \right\rangle$

$$T_pM_2 = \left\langle \frac{\partial \varphi_2^{-1}}{\partial y_1}\Big|_{\varphi_2(f(p))}, \dots, \frac{\partial \varphi_2^{-1}}{\partial y_{n_2}}\Big|_{\varphi_2(f(p))} \right\rangle ?$$

$\angle\!\!\rightarrow$ in dieser Basiswahl ergibt sich

$$Df|_p = \text{Jakobi-Matrix von } f_{loc} = \varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1}$$

dh $Df|_p \left[\frac{\partial \varphi_1^{-1}}{\partial x_j}\Big|_{\varphi_1(p)} \right] = \sum_{i=1}^{n_2} \frac{\partial f_{loc}^i}{\partial x_j}(\varphi_1(p)) \frac{\partial \varphi_2^{-1}}{\partial y_i}\Big|_{\varphi_2(f(p))}$

Wir schließen das Kapitel mit der Einführung "abstrakter" Mfk ab.

Abstrakte, nicht in $\mathbb{R}^N$ eingebettete Mannigfaltigkeiten

Definition 5.7 Eine n-dim. C^k-Mfk ist eine Menge M zusammen mit einem Atlas $(\mathcal{U}_j, \varphi_j)_{j\in I}$

- I ist eine abzählbare Indexmenge
- $\varphi_j : \mathcal{U}_j \longrightarrow \varphi_j(\mathcal{U}_j) \subset \mathbb{R}^n$ bijektiv und die Bilder $\varphi_j(\mathcal{U}_j) \subset \mathbb{R}^n$ sind offen
- $M = \bigcup_{j\in I} \mathcal{U}_j$, $\mathcal{U}_j$'s überdecken also ganz M.
- Kartenwechsel $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \to \varphi_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$

sind C^k-Diffeo's. ($\varphi_*(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \subset \mathbb{R}^n$ werden ebenfalls für alle Überschneidungen als offen vorausgesetzt)

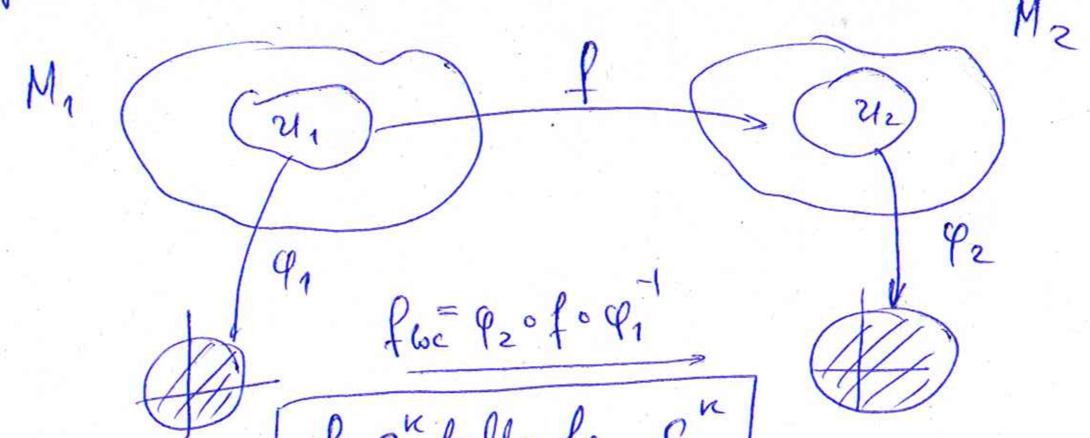
<u>Bemerkungen 5.8</u>

a) Mit dieser Definition wird M zu einem <u>Topologischen Raum</u>: $\mathcal{U} \subset M$ heißt offen, falls $\forall i \in I: \varphi_i(\mathcal{U} \cap \mathcal{U}_i) \subset \mathbb{R}^n$ offen.

b) C^k-Untermfk ist eine C^k-Mfk, denn nach Satz 5.4 sind bei einer C^k-Untermfk die Kartenwechsel C^k-Diffeos.

<u>Differenzierbare Abb zwischen Mfk (abstrakten Mfk)</u>

Definition 5.5 macht hier auch Sinn

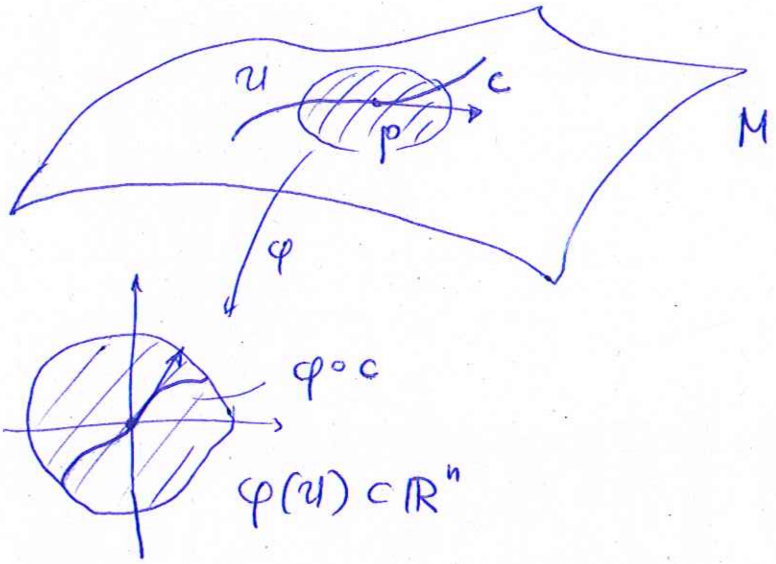


$$\boxed{f \ C^k \text{ falls } f_{loc} \ C^k}$$

Allerdings müssen wir
- totales Differential Df
- Tangentialraum T_pM

auf abstrakten Mfk etwas ändern:

Tangentialraum einer abstrakten Mfk



PROBLEM: $\dot{c}(0)$ existiert im üblichen Sinne nicht.

LÖSUNG: Betrachte stattdessen $c_\varphi := \varphi \circ c : I \to \mathbb{R}^n$ und $\dot{c}_\varphi(0)$ als Vektor in $\mathbb{R}^n$.

<u>Definition 5.9</u> Sei M eine abstrakte C^k-Mfk, $p \in M$ und p liege in einer lok. Karte $(\mathcal{U}, \varphi)$

$$T_pM := \{ [c] \text{ Äquivalenzklassen von Kurve } c: I \to M \text{ mit } c(0) = p \}$$

wobei $c \sim \tilde{c} :\Leftrightarrow$ ~~[illegible]~~

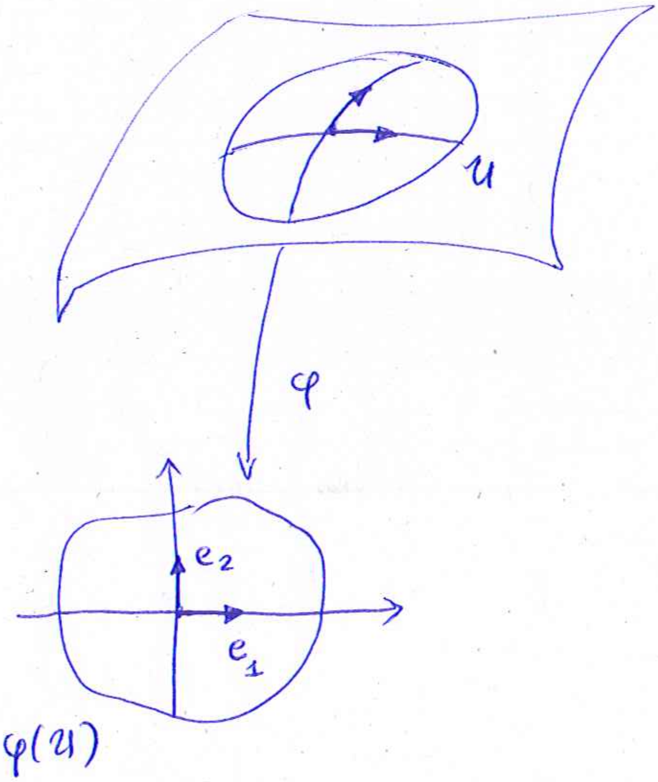
$$\dot{c}_\varphi(0) = \dot{\tilde{c}}_\varphi(0) \in \mathbb{R}^n.$$

$\left.\begin{array}{l}\text{Beweis der Wohldefiniertheit:} \\ \text{Beweis, dass Äquivalenzrelation:}\end{array}\right\}$ Ü

~~Man kann T_pM alternativ als den Vektorraum der Richtungsableitungen auffassen~~

Basis von T_pM: Betrachte ONB $\{e_j\}_{j=1}^n$ von $\mathbb{R}^n$

$$T_pM = \langle [\varphi^{-1}(te_j)] \mid j = 1, \ldots, n \rangle$$



- Wir schreiben manchmal auch $[\varphi^{-1}(te_j)] = \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p$.
- Die Notation $\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p$ impliziert, dass Tangentialvektoren als Ableitungen (Derivationen) aufgefasst werden können:

$D: C^1(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ ist eine Derivation at $p \in M$ falls D linear und $D(f \cdot g) = Df \cdot g(p) + f(p) Dg$.

Hier: $\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p f := \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_{\varphi(p)} [\varphi \circ f]$ ist ein Beispiel einer solchen Derivation

"Richtungsableitg"

$$T_pM = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p \right\rangle$$

Totales Differential einer diffb. Abb. zwischen abstr. Mfk $M \to N$

$$Df\big|_p : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$$

$$Df\big|_p[c] := [f \circ c]$$

genauso wie bei U'mfk.

in lokalen Koord $T_pM = \langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \rangle \{(U,\varphi)$

$$T_{f(p)}N = \langle \frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_r} \rangle \{(V,\psi)$$

$$Df\big|_p\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\right] = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial (\psi \circ f)_i}{\partial x_j}\Big|_p \frac{\partial}{\partial y_i}$$

Einbettungssatz von Whitney: Jede n-dim C^1-Mfk M lässt sich in $\mathbb{R}^{2n}$ einbetten, d.h. es ex. eine C^1-Abb $\iota : M \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ mit $D\iota|_p : T_pM \to \mathbb{R}^{2n}$ inj.

[Somit ist $\iota(M) \subset \mathbb{R}^{2n}$ eine eingebettete n-dim C^1-Untermfk und $\iota : M \to \iota(M)$ ist C^1-Diffeo.]

Es stellt sich die Frage, warum überhaupt abstrakte Mfk einführen, wenn sie im Endeffekt doch alle Untermfk sind!?

Ü Torus $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ lässt sich sehr leicht als abstrakte Mfk beschreiben, aber schwieriger als U'mfk.

Präziser Zugang

Abstrakte Mannigfaltigkeiten

(A) Topologische Räume

A.1 Definition: Sei X eine Menge. Ein Mengensystem $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ der Potenzmenge von X, heißt Topologie auf X, falls gilt:

- $\emptyset, X \in \tau$
- $U, V \in \tau \Rightarrow U \cap V \in \tau$

$\Rightarrow$ Durchschnitt endlich vieler Mengen in τ ist wieder in τ

- $U_i \in \tau$, $i \in I$ beliebige Indexmenge $\Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$

$\Rightarrow$ Vereinigung beliebig vieler Mengen in τ ist wieder in τ.

A.2 Beispiele: a) (X, τ) mit $\tau = \{\emptyset, X\}$ "triviale" Topologie

b) (X, τ) mit $\tau = \mathcal{P}(X)$ "diskrete" Topologie.

c) (X, τ) top. Raum, $A \subset X$, dann ist (A, τ_A) mit $\tau_A := \{A \cap U \mid U \in \tau\}$ wieder ein top. Raum, mit "Spurtopologie" τ_A.

d) (X, τ) top. Raum, $f: X \to Y$ surj. Dann (Y, τ_f) mit $\tau_f := \{V \subset Y \mid f^{-1}(Y) \in \tau\}$ wieder ein top. Raum mit "Quotiententop" τ_f.

A.3 Begriffsbildung: (X, τ_X) top. Raum; (Y, τ_Y) top Raum

- $U \in \tau_X$ heißen "offen", $U \subset X$ mit $X \setminus U \in \tau_X$ – "abgeschl"
- $f: (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ "stetig", falls $\forall V \in \tau_Y : f^{-1}(V) \in \tau_X$.

dh f stetig falls Urbilder offener Mengen wieder offen sind

- f stetig, bijektiv und f^{-1} wieder stetig $\Rightarrow f$ "Homöomorphism".
- $p \in X$, $U \in \tau$ mit $p \in U$ heißt "Umgebung" von p".

Definition A.4 Sei (X,τ) topolog. Raum

a) $\mathcal{B} \subset \tau$ heißt "Basis" der Topologie falls alle $\mathcal{U} \in \tau$ sich als Vereinigung von $\mathcal{U}_i \in \mathcal{B}$, $i \in I$ ergeben.

b) (X,τ) erfüllt das "2-te Abzählbarkeitsaxiom" falls τ eine abzählbare Basis besitzt.

c) (X,τ) heißt Hausdorffsch falls

$$\forall \underset{p \neq q}{p,q \in X} \ \exists \underset{p \in \mathcal{U},\, q \in V}{\mathcal{U}, V \in \tau} : \mathcal{U} \cap V = \emptyset.$$

~~d) (X,τ) ist kompakt~~

Beispiel A.5
- $X = \mathbb{R}^n$ mit τ^n – übliche Topologie
  $\mathcal{B} := \{ B_\varepsilon(x) \mid \varepsilon > 0,\ x \in \mathbb{R}^n \}$ ist Basis von τ^n.
- $(\mathbb{R}^n, \tau^n)$ erfüllt das 2-te Abz. Axiom mit
  $\tilde{\mathcal{B}} := \{ B_\varepsilon(x) \mid \varepsilon \in \mathbb{Q}^+,\ x \in \mathbb{Q}^n \}$ abz. Basis.

Es folgen nun 3 Kompaktheitsbegriffe:

Definition A.6

a) (X,τ) heißt <u>kpt</u> falls JEDE offene Überdeckung $X = \bigcup_{j \in J} \mathcal{U}_j$, $\{\mathcal{U}_j\} \subset \tau$ eine endliche Teilüberdeckung $X = \bigcup_{k \in I} \mathcal{U}_{j_k}$ mit $|I| < \infty$ besitzt.

b) (X,τ) heißt <u>lokalkpt</u> falls $\forall p \in X\ \forall \mathcal{U} \in \tau$ mit $p \in \mathcal{U}$
$\exists A \subset X$ mit $A \subseteq \mathcal{U}$: (A, τ_A) ist kompakt mit der Spurtopologie.

- Zusätzlich fordert man, dass $X = \bigcup_{j \in L} K_j$ mit (K_j, τ_{K_j}) kompakt und L abzählbar

c) (X,τ) heißt <u>parakompakt</u> falls es zu jeder offenen Überdeckung eine lokal endliche Verfeinerung existiert dh falls $X = \bigcup_{j \in J} \mathcal{U}_j$ eine beliebige offene Üb.

dann ex. $X = \bigcup_{i \in I} V_i$ eine offene Überdeckg s.d

- $X = \bigcup_{i \in I} V_i$ ist eine Verfeinerung dh
  jedes V_i ist in einem $\mathcal{U}_j$ enthalten.
- $X = \bigcup_{i \in I} V_i$ ist lokal endlich dh
  $\forall p \in X \ \exists \, \mathcal{U} \in \tau, p \in \mathcal{U} : \# \{ i \in I \mid \mathcal{U} \cap V_i \neq \emptyset \} < \infty$.
  also kann eine genügend kleine Umgebung $\mathcal{U} \in \tau$ um $p \in X$ gewählt werden, die nur endlich viele V_i's schneidet.

WOFÜR DAS GANZE?

FACTS A.7

1) (X, τ) Hausdorffsch, lokal kpt, erfüllt das 2. Abz Axiom
$\Rightarrow (X, \tau)$ ist parakompakt.

2) ~~(X,τ) Hausdorffsch, kompakt~~ (X, τ) parakompakt
$\Rightarrow$ ~~(X,τ)~~ Jede offene Überdeckung besitzt eine Zerlegung der Eins Ü

dh falls $X = \bigcup_{j \in J} \mathcal{U}_j$ dann ex. eine
Familie stetiger Fkt $\{ f_i : X \to [0,1] \}_{i \in I}$
so dass $\sum_{i \in I} f_i(x) \equiv 1$ für alle $x \in X$, die
Summe ~~ist~~ für jedes fixe $x \in X$ nur endlich
viele Summanden $f_i(x) \neq 0$ und $\operatorname{supp} f_i \subset \mathcal{U}_j$

Jetzt können wir die abstrakten Mfk formal korrekt definieren (zuvor hatten wir die topologische Aspekte beseite geschoben)

<u>Definition A.8</u> Sei (X, τ) ein topologischer Raum

a) X ist eine topologische Mfk falls

- $\forall p \in X \; \exists \, p \in \mathcal{U} \in \tau$ und $\varphi : \mathcal{U} \to \varphi(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^n$ Homöo.
- M ist Hausdorffsch und erfüllt das 2. Abz. Axiom.

Ü M ist lokal kompakt, insbesondere ist wegen FACTS A.7(1) jede topologische Mfk parakompakt und besitzt eine Zerlegung der $\mathbb{1}$.

b) X ist eine C^k-Mfk falls

- X ist eine topologische Mfk
- Alle Kartenwechsel $\varphi \circ \varphi^{-1}$ sind C^k.

Ü M C^k-Mfk mit Atlas $(\mathcal{U}_j, \varphi_j)_{j \in I}$.
Dann ex. ein abzählbarer Teilatlas $(\mathcal{U}_{j_k}, \varphi_{j_k})_{k \in K}$ (K abzählbar). Hinweis: 2. Abz. Axiom.

Übung zum Tangentialraum einer abstrakten Mfk

a) $\theta : T_pM \to \mathbb{R}^n, \; [c] \mapsto \frac{d}{dt}\Big| \varphi \circ c(t)$
ist ein Vektorraum-Isomorphismus

b) $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p \right\rangle$ bildet eine Basis von T_pM

c) Kettenregel für diffbare Abb $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} S$

$$D(g \circ f)\big|_p = Dg\big|_{f(p)} \circ Df\big|_p$$

§ 6. Vektorbündel und Tangentialbündel

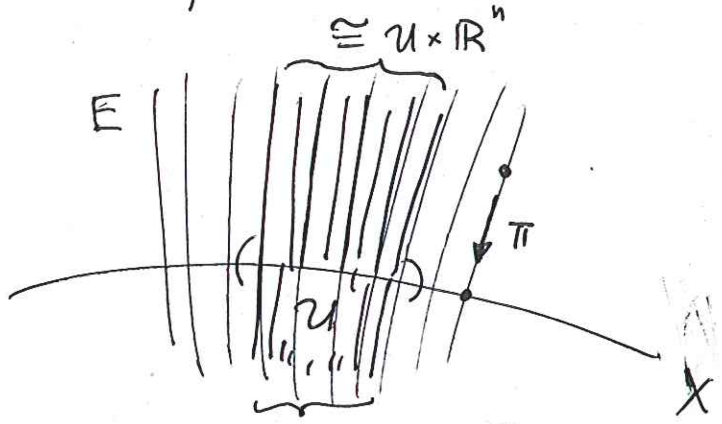
Definition 6.1 Sei X eine n-dim. diffbare Mfk (C^1).
Ein *Vektor(raum)bündel vom Rang r über X*

- ist eine diffbare Mfk E
- zusammen mit einer surjektiven diffb. Abb $\pi : E \to X$
- so dass $\forall x \in X$: $\pi^{-1}(x) = E_x$ Faser, ein r-dim VR ist
- und für alle $x \in X$ offene Umgebung $\mathcal{U} \subset X$ ex. mit einem Diffeo $\varphi : \pi^{-1}(\mathcal{U}) \to \mathcal{U} \times \mathbb{R}^r$ so dass

  → $\varphi\big|_{E_y} : E_y \to \mathbb{R}^r$ ein $\mathbb{R}$-Isom-m für alle $y \in \mathcal{U}$

  → $\mathrm{proj}_1 \circ \varphi \equiv \pi$ auf $\pi^{-1}(\mathcal{U})$

Die Abb φ heißt "lokale Trivialisierung"
Die Abb π heißt "Vektorbündel-Abb".
Die Mfk X heißt "Basis" des Vektorbündels E
E heißt auch "Totalraum" des Vektorbündels



$\varphi : \pi^{-1}(\mathcal{U}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n$

Bevor wir Beispiele für Vektorbündel angeben, müssen wir lernen, wie man welche konstruiert.