Satz 7.3 Sei $X \in \Gamma(TM)$ und (U, φ) eine lokale Karte. Sei $c: I \to U \subset M$ eine diffbare Kurve.

Dann sind äquivalent:

a) c ist Integralkurve von X

b) für $X|_U = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ ist $(\varphi \circ c)$ Intkurve von $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Gamma(\varphi(U) \times \mathbb{R}^n)$.

Beweis Schreibe $c_t(s) := c(t+s)$ für hinr. kleine t, s.

Es gilt: $\dot{c}(t) = [c_t] = [\varphi^{-1} \circ \varphi \circ c_t]$

$$= D\varphi^{-1}|_{\varphi(c(t))} [\varphi \circ c_t].$$

Sei $\{e_j\}_{j=1}^{n}$ ONB des $\mathbb{R}^n$, schreibe

$$(\varphi \circ c_t)\dot{}(0) =: \sum_{j=1}^{n} \dot{\tilde{c}}_j(t) e_j$$

$$\Rightarrow \dot{c}(t) = D\varphi^{-1}|_{\varphi(c(t))} [\varphi \circ c_t]$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \dot{\tilde{c}}_j(t) D\varphi^{-1}|_{\varphi(c(t))} [e_j]$$

$$\underset{\text{Def}}{=} \sum_{j=1}^{n} \dot{\tilde{c}}_j(t) \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_{c(t)}$$

Also $\dot{c}(t) = X(c(t)) \iff \forall j = 1, \dots, n$

$$\dot{\tilde{c}}_j(t) = \lambda_j(c(t))$$

$\iff$ $\varphi \circ c$ Intkurve von $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

$\square$

<u>Satz 7.4</u> Sei X diffbares Vektorfeld auf M, $p \in M$. Dann ex. eine offene Umgebung U von p, $\varepsilon > 0$ und eine diffbare Abbildung

$$\Phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \to M$$
$$(t, q) \mapsto \Phi_t(q),$$

sodass:

1) Für $q \in U$ ist $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, $t \mapsto \Phi_t(q)$ Integralkurve von X mit $c(0) = \Phi_0(q) = q$.

2) Für alle $s, t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ mit $|s+t| < \varepsilon$ und alle $q \in U$ mit $\Phi_t(q) \in U$ gilt
$$\Phi_s \circ \Phi_t(q) = \Phi_{s+t}(q).$$

<u>Beweis</u> 1) folgt nach Lokalisierung mittels ~~der~~ Lemma 7.3 aus einem Resultat von GDGL auf $\mathbb{R}^n$.

2) $c(s) = \Phi_s(\Phi_t(q))$ und $\tilde{c}(s) = \Phi_{s+t}(q)$ sind beide Integralkurven von X mit
$$c(0) = \Phi_0(\Phi_t(q)) = \Phi_t(q) = \tilde{c}(0),$$
und stimmen nach dem selben Resultat überein.

<u>Def 7.5</u> Die Familie $\{\Phi_t : U \to M\}_{t \in (-\varepsilon, \varepsilon)}$ nennen wir <u>(lokalen) Fluss von X</u>. Kann man $U = M$, $\varepsilon = \infty$ wählen, so heißt X <u>vollständiges Vektorfeld</u> und Integralkurven von X sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

Ist X vollständig, so ist $\Phi_t : M \to M$ sogar ein Diffeomorphismus und vermöge Satz 7.4 2) ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \rho : (\mathbb{R}, +) &\longrightarrow (\mathrm{Diffeo}(M), \circ) \\ t &\longmapsto \Phi_t \end{aligned}$$

ein Gruppenhomomorphismus, eine sogenannte Einparametergruppe von Diffeomorphismen.

__Lem 7.6__ Ist M kompakte Mgf, X Vektorfeld auf M, so ist X vollständig.

__Beweisidee__ Überdecke M mit $\{U_\alpha\}$ so dass auf jedem U_α $\Phi_t^\alpha : (-\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\alpha) \times U_\alpha \to M$ ex. Gehe zu endl. Überdeckung über. Eindeutigkeitsresultat liefert dann Übereinstimmung auf den Schnitten der U_α $\rightsquigarrow$ globaler Fluss.

$\square$

__Def 7.7__ Sei $X \in \mathfrak{V}(M) =: \Gamma(TM)$, $f \in C^\infty(M)$. Die Lie-Ableitung von f in Richtung X definieren wir durch

$$\begin{aligned} L_X : C^\infty(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ f &\longmapsto \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\Phi_t(\cdot)), \end{aligned}$$

wobei Φ_t der lokale Fluss von X sei.

__Notation__ $Xf := X(f) := L_X f$.

Eigenschaften der Lie-Ableitung:

- Für jedes $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $c(0) = p$, $c'(0) = X(p)$ gilt $(L_X f)(p) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(c(t))$
- Sind $\xi_1, \dots, \xi_n \in C^\infty(M)$, $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{V}M$, so gilt
$$L_{\sum_{i=1}^n \xi_i \cdot X_i} f = \sum_{i=1}^n \xi_i L_{X_i} f$$

(Ü)

<u>Beweis</u> Die Definition behauptete die Abbildungseigenschaft $L_X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$.
Wir müssen also zeigen: $L_X f \in C^\infty(M)$.
Sei $p \in M$, (U, x) Karte von M um p. Dann ex. $\xi_1, \dots, \xi_n : U \to \mathbb{R}$ diffb. Fkt mit $X = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Wir erhalten also
$$L_X f = L_{\sum \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}} f = \sum_{i=1}^n \xi_i L_{\frac{\partial}{\partial x_i}} f.$$

Es gilt
$$\begin{aligned}
\left(L_{\frac{\partial}{\partial x_i}} f\right)(p) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (f \circ x^{-1})(x(p) + t e_i) \\
&= D(f \circ x^{-1})_{x(p)} e_i \\
&= \frac{\partial}{\partial v_i} (f \circ x^{-1})(x(p))
\end{aligned}$$
$$\Rightarrow L_{\frac{\partial}{\partial x_i}} f = \frac{\partial}{\partial v_i} (f \circ x^{-1}) \circ x \in C^\infty(M).$$
$\square$

<u>Def 7.8</u> Eine Abbildung $D : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ heißt <u>Derivation</u>, falls D $\mathbb{R}$-linear ist und der Produkt- (Leibniz) regel genügt:
$$D(f \cdot g) = (Df) \cdot g + f \cdot (Dg)$$
für alle $f, g \in C^\infty(M)$.

Wir bezeichnen mit $\mathrm{Der}(C^\infty(M))$ die Menge aller Derivationen. Ist $f \in C^\infty(M)$, so wird $\mathrm{Der}(C^\infty(M))$ vermöge

$$(f \cdot D)(g) := f \cdot D(g)$$

zu einem $C^\infty(M)$-Modul.

Lem 7.9 1) Sind $f, g \in C^\infty(M)$, $f|_U \equiv g|_U$ auf einer offenen Umgebung U von p, so gilt für $D \in \mathrm{Der}(C^\infty(M))$

$$(Df)(p) = (Dg)(p).$$

2) Es genügt, um Derivationen anzuwenden, dass Funktionen nur auf einer offenen Teilmenge von M definiert sind.

3) (lokal) konstante Funktionen werden auf $0 \in C^\infty(M)$ geschickt.

Ohne Beweis.

Lemma 7.10 Für $X \in VM$ ist L_X eine Derivation.

Beweis. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ $L_X(\alpha \cdot f)(p) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} (\alpha \cdot f)(\Phi(t,p))$

$$= \alpha \, L_X f(p).$$

Analog $L_X(f+g) = L_X f + L_X g$.

$$(L_X(f \cdot g))(p) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (f \cdot g)(\Phi_t(p))$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\Phi_t(p))\, g(\Phi_t(p))$$

$$= (L_X f)(p) \cdot g(p) + f(p) \cdot (L_X g)(p).$$

Satz 7.11

$$L : V(M) \to \mathrm{Der}(C^\infty(M))$$
$$X \longmapsto L_X$$

ist Isomorphismus von $C^\infty(M)$-Moduln.

Beweis. $C^\infty(M)$-Linearität wurde bereits gezeigt.

Injektivität ~~Sei X: $L_X = 0$.~~ Sei (U, x) Karte von M, $X_{|U} = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Gilt $L_X = 0$, so gilt insb. $L_{X_{|U}} = 0$. Dann gilt aber,

$0 = L_{X_{|U}} x_j = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}(x_j) = \xi_j$. Also $X_{|U} = 0$, damit $X = 0$, da (U, x) beliebige Karte.

Surjektivität Sei also $D \in Der(C^\infty(M))$, $p \in M$, (U, x) Karte um p mit $x(U) \subset \mathbb{R}^n$ konvex.

Sei ferner $f \in C^\infty(M)$, setze $\tilde{f} := f \circ x^{-1} : x(U) \to \mathbb{R}$.

Für $h \in x(U)$ setze

$$g_h : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \tilde{f}((1-t)x(p) + th)$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(h) = g_h(1) &= g_h(0) + \int_0^1 g_h'(t)\,dt \\
&= \tilde{f}(x(p)) + \int_0^1 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v_i}((1-t)x(p) + th)(h_i - x(p)_i)\,dt \\
&= f(p) + \sum_{i=1}^n (h_i - x(p)_i) \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v_i}((1-t)x(p) + th)\,dt}_{=: \tilde{f}_i(h)}
\end{aligned}$$

Da Integrand und alle seine part. Abl. stetig sind, ist $\tilde{f}_i : x(U) \to \mathbb{R}$ diffbar. Setze $f_i := \tilde{f}_i \circ x : U \to \mathbb{R}$

Für $q \in U$ haben wir nun:

$$f(q) = \tilde{f}(x(q)) = f(p) + \sum ((x_i - x(p)_i) f_i)(q).$$

Es gilt nun zum einen

$$\left(L_{\frac{\partial}{\partial x_i}} f\right)(p) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v_i}(x(p)) = \tilde{f}_i(x(p)) = f_i(p)$$

und zum anderen:

$$\begin{aligned}
(Df)(p) &= \sum_{i=1}^n \left(D(x_i - x(p)_i) f_i + (x_i - x(p)_i) \cdot Df_i\right)(p) \\
&= \sum_{i=1}^n (Dx_i)(p) \cdot (L_{\partial/\partial x_i} f)(p) \\
&= \left(L_{\sum_{i=1}^n Dx_i \cdot \partial/\partial x_i} f\right)(p) =: L_X f(p).
\end{aligned}$$

Wohldef. wg. Inj. $\square$

Bemerkung: Falls $D_1, D_2 \in \mathrm{Der}(C^\infty(M))$
dann ist i.A. $D_1 \circ D_2 \notin \mathrm{Der}(C^\infty(M))$:

$$(D_1 \circ D_2)(f \cdot g) = D_1 \{ (D_2 f) \cdot g + f \cdot (D_2 g) \}$$
$$= (D_1 D_2 f) g + f \cdot (D_1 D_2 g)$$
$$+ \underbrace{D_2 f \cdot D_1 g + D_1 f \cdot D_2 g}_{\text{i.A. } \neq 0}.$$

~~Definition:~~ Allerdings ist $D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1 \in \mathrm{Der}(C^\infty(M))$ wieder eine Derivation. Das motiviert die folgende

Definition 7.12 Seien $X, Y \in \Gamma(TM)$ Vektorfelder.
Wir definieren die Lie-Klammer $[X, Y] \in \Gamma(TM)$ mittels des Isom-mus $\Gamma(TM) \cong \mathrm{Der}(C^\infty(M))$ indem wir die Lie-Klammer definieren:

$$L_{[X,Y]} := L_X \circ L_Y - L_Y \circ L_X .$$

(kurz $[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$).

Beispiel 7.13 $M = \mathbb{R}^n$, $X = a \frac{\partial}{\partial x_i}$, $Y = b \frac{\partial}{\partial x_j}$ mit $a, b \in C^\infty(M)$

$$[X,Y] f(p) = \cancel{\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f \right)(p) - \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right.}$$

$$= a(p) \cdot \frac{\partial b}{\partial x_i}(p) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) - b(p) \frac{\partial a}{\partial x_j}(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$
$$+ \cancel{(a \cdot b)(p) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)} - \cancel{(a \cdot b)(p) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p)}$$

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t_0} (f\circ\Phi_t\circ f^{-1})(p) = Df\Big|_{\Phi_{t_0}(f^{-1}(p))} \left\{ \frac{d}{dt}\Big|_{t_0} \Phi_t\circ f^{-1}(p) \right\}$$

$$= Df\Big|_{\Phi_{t_0}(f^{-1}(p))} \left\{ \frac{d}{ds}\Big|_0 \Phi_s\circ\Phi_{t_0}\circ f^{-1}(p) \right\}$$

$$= Df\Big|_{\dots} \left\{ X\left(\Phi_{t_0}\circ f^{-1}(p) \right) \right\}$$

$$= Df\Big|_{\dots}\circ X\circ f^{-1}\Big|_{f\circ\Phi_t\circ f^{-1}(p)} = f_*X\Big|_{f\circ\Phi_t\circ f^{-1}(p)}.$$

also gilt wegen Eindeutigkeit $f\circ\Phi_t\circ f^{-1} = \Psi_t$ $\boxtimes$

<u>Proposition 7.18</u> Seien $X,Y\in\Gamma(TM)$ mit Flüssen Φ_t, Ψ_t.

$$[X,Y]=0 \iff \Phi_t\circ\Psi_s = \Psi_s\circ\Phi_t \text{ für alle } t,s.$$

d.h. VF kommutieren — d.h. Flüsse kommutieren

<u>Beweis:</u> Ü

---

§8 Riemannsche Mannigfaltigkeiten

Wir wollen auf den Fasern von TM ein Skalarprodukt definieren, das glatt vom Basispunkt abhängt.

<u>Definition 8.1</u> Sei M^n eine diffbare Mfk. Eine Riemannsche Metrik g ist eine Familie $(g_p)_{p\in M}$ von <u>Skalarprodukten</u>

$$g_p : T_pM\times T_pM \longrightarrow \mathbb{R},$$

so dass in jeder Karte $(\mathcal{U}, \varphi)$ die Koeffizientenfunktionen

$$g_{ij} : \varphi(\mathcal{U}) \to \mathbb{R} \; ; \; p \mapsto g\big|_{\varphi^{-1}(p)} \left[\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p , \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p \right]$$

für alle (i,j) diffbar sind; <u>lokal</u>: $\underline{g = \sum_{ij} g_{ij} \, dx^i dx^j}$

<u>Bemerkung</u>: Die Forderung, dass g diffbar ist, kann als $g \in \Gamma(T^*M \times T^*M)$ notiert werden. g ist ein ~~~~ diffbarer Schnitt in $T^*M \times T^*M$, genauer in $\mathrm{Sym}^2(T^*M)$. Insbesondere ist für <u>alle $X, Y \in \Gamma(TM)$</u>: $g(X,Y) : M \to \mathbb{R}$ diffbar

<u>Definition 8.2</u>
M mit einer Riemannschen Metrik g heißt Riemannsche Mfk (M,g).

Auf (M,g) kann man nun die Länge von Tangentialvektoren definieren: ~~$X \in \Gamma(TM)$, kann~~ für $V \in T_pM$ setze

$$\|V\| := \sqrt{g_p(V,V)}$$

für diffbare VF: $X \in \Gamma(TM)$ setze:

$$\|X\| : M \to \mathbb{R}^+ \; ; \; p \mapsto \|X(p)\| .$$

<u>Definition 8.3</u> a) Seien (M,g), (N,h) Riemannsche Mfk. Ein Diffeo $f : M \to N$ heißt Isometrie, falls für alle $p \in M$, $X, Y \in T_pM$ gilt:

$$g_p(X,Y) = h_{f(p)}\left(Df\big|_p [X] , Df\big|_p [Y] \right)$$

(b) Falls f oben nur ein lokaler Diffeo ist, heißt f lokale Isometrie.

(c) M, N heißen isometrisch, falls eine Isometrie $f: M \to N$ ex.

<u>Beispiel 8.4</u> $M = \mathbb{R}^n$, g sei Standard-Euklidische Metrik.

$$g_p(X, Y) := \langle X, Y \rangle_{\mathbb{R}^n}$$

wobei $\mathbb{R}^n$ mit $T\mathbb{R}^n$ identifiziert wird.

Sei $A \in O(n)$, $b \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $\phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\phi(p) = A \cdot p + b$ eine Isometrie von $(\mathbb{R}^n, g)$. Tatsächlich:

- $D\phi|_p = A$ für alle $p \in \mathbb{R}^n$
- $g_p(X, Y) = \langle X, Y \rangle_{\mathbb{R}^n}$
- $g_{\phi(p)}(D\phi|_p[X], D\phi|_p[Y])$

$$= \langle AX, AY \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle X, Y \rangle_{\mathbb{R}^n} \quad \text{da } A \in O(n)$$

Dh Rotationen und Translationen von $\mathbb{R}^n$ sind Isometrien.

<u>Proposition 8.5</u> Sei $f: M^m \to N^n$ eine Immersion, dh $Df|_p: T_pM \to T_{f(p)}N$ ist injektiv für alle $p \in M$. Sei ferner g^N eine Riemannscher Metrik auf N. Dann definiert

$$(f^*g)_p(X, Y) := g^N_{f(p)}(Df|_p(X), Df|_p(Y))$$

eine Riemannsche Metrik (Pullback von g) auf M.