Prof. Dr. B. Vertman
M. Wunderlich

WS 2015/2016
WWU Münster

Übungen zur Funktionentheorie
Serie 2

Aufgabe 5 (5 Punkte)**.** Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und $f : G \to \mathbb{C}$ stetig komplex differenzierbar. Für ein $z_0 \in G$ sei $f'(z_0) \neq 0$. Zeigen Sie, dass es offene Umgebungen U von z_0 und V von $f(z_0)$ gibt, so dass gilt:

a) $f : U \to V$ ist bijektiv.

b) Die Umkehrabbildung ist ebenfalls stetig komplex differenzierbar und an $w \in V$ gilt folgende Umkehrregel:
$$\left(f^{-1}\right)'(w) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(w)\right)}$$

Aufgabe 6 (5 Punkte)**.** Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Wir definieren den *Laplace-Operator* durch
$$\Delta f := \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f,$$
und nennen f *harmonisch*, wann immer $\Delta f \equiv 0$ gilt. Zeigen Sie:

a) Die Ableitungen nach z und $\bar{z}$ vertauschen, d.h. $\Delta f = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial z} f$.

b) Ist f holomorph, so sind $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ harmonisch.

Aufgabe 7 (5 Punkte)**.** Bestimmen Sie die Konvergenzradii folgender Reihen:

a) $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$, $x \in \mathbb{R}$

b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-i)k^k}{\sqrt{2}} z^k$

c) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z+4)^k$, wobei $a_{2j} = (\sqrt{3})^{2j}, a_{2j-1} = \frac{1}{2j-1}$

d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{17+i}{k!} z^k$

e) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{ki}{k^3+1} (z-2i)^k$

f) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\prod_{j=1}^{k} (2j+1)\right) (z - (\sqrt{2}+15i))^k$

Aufgabe 8 (5 Punkte)**.** Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie:

a) Ist $f(z)$ reell für alle $z \in U$, so ist f konstant.

b) Ist $|f(z)|$ konstant, so auch f.

Folgern Sie, dass $z \mapsto |z|$ keine holomorphe Funktion ist.

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Freitag, den 6. November 2015, um 10.00 Uhr, in den Briefkästen im Hörsaalgebäude.