Satz 12.1 Sei $p(z) = \sum_{k=0}^{m} a_k z^k$ ein kplxes Polynom, $a_m \neq 0$.
Dann existieren $(m+1)$ nicht notwendigerweise verschiedene Nullstellen $z_0, \dots, z_m \in \mathbb{C}$ s.d.

$$p(z) = a_m (z - z_0)(z - z_1) \cdots (z - z_m)$$

Beweis: Fundamentalsatz der Algebra: p Polynom ist nicht-konstant ($a_m \neq 0$) also ex. eine kplxe Nullstelle $z_0 \in \mathbb{C}$, $p(z_0) = 0$.

Potenzreihenentwicklungssatz: $\Rightarrow p(z) = \sum_{k=1}^{m} b_k (z - z_0)^k$

$$= (z - z_0)^k \cdot \tilde{p}(z)$$

Nun iteriere das Argument for $\tilde{p}$, Polynom vom Grad $(m-1)$ ☒

Satz 12.2 Sei $p(z) = \sum_{k=0}^{m} a_k z^k$ ein kplxes Polynom mit $a_m \neq 0$ und $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{R}$.
Dann gilt: falls $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ eine nicht-relle Nullstelle von p ist, dann ist $\overline{z_0} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ebenfalls eine Nullstelle von p.

Beweis: Setze $U := \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \geq 0 \}$.
$p : U \to \mathbb{C}$ ist stetig und wegen reellen Koeffizienten auf $p: U \cap \mathbb{R}$ reell-wertig.
Nach Schwarzschem Spiegelungsprinzip existiert holomorphe Spiegelung $\tilde{p} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

so dass $\tilde{p}(z) = \begin{cases} p(z), & z \in \mathcal{U} \\ \overline{p(\bar{z})}, & \bar{z} \in \mathcal{U} \end{cases}$

Wegen Identitätssatz gilt $\tilde{p} \equiv p$ auf $\mathbb{C}$.

$$\Rightarrow \overline{p(\bar{z})} = p(z)$$

Falls $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ eine NST ist, gilt:

$$\overline{p(\bar{z}_0)} = p(z_0) = 0$$

$$\Rightarrow p(\bar{z}_0) = 0$$

$\Rightarrow \bar{z}_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ebenfalls NST

$\square$

II Trigonometrische Formeln

Lemma 12.3 Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $\sin\left(\frac{z}{2}\right) \neq 0$.

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kz) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)z\right)}{2\sin\left(\frac{z}{2}\right)}$$

Beweis:

$$e^{ikz} = \cos(kz) + i\sin(kz)$$

$$e^{-ikz} = \cos(kz) - i\sin(kz)$$

da $\cos(u) = \cos(-u)$; $\sin(u) = -\sin(-u)$

(das sieht man direkt aus der Reihendarstellung von sin / cos).

$$\Rightarrow \cos(kz) = \frac{1}{2}\left(e^{ikz} + e^{-ikz}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kz) = \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^{n} e^{ikz} \quad \left(\text{denn } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} e^{i0z}\right)$$

$$= \frac{1}{2} e^{-inz} \sum_{k=-n}^{n} e^{i(k+n)z}$$

$$= \frac{1}{2} e^{-inz} \sum_{m=0}^{2n} e^{imz}$$

$m = k+n$

$$= \frac{1}{2} e^{-inz} \sum_{m=0}^{2n} \left(e^{iz}\right)^m = \circledast$$

Beachte die Formel $\displaystyle\sum_{m=0}^{2n} x^m = \frac{1 - x^{2n+1}}{1 - x}$

die für <u>alle</u> $x \neq 1$ gilt.

Hier gilt: $\sin\left(\frac{z}{2}\right) \neq 0 \Rightarrow$ insbesondere $e^{iz} \neq 1$

also rechnet man weiter

$$\circledast = \frac{1}{2} e^{-inz} \frac{1 - e^{i(2n+1)z}}{1 - e^{iz}}$$

$$= \frac{1}{2} e^{-i(n+\frac{1}{2})z} \frac{1 - e^{i(2n+1)z}}{e^{-i\frac{z}{2}} - e^{i\frac{z}{2}}}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{e^{-i(n+\frac{1}{2})z} - e^{i(n+\frac{1}{2})z}}{e^{-i\frac{z}{2}} - e^{i\frac{z}{2}}}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)z\right)}{\sin\left(\frac{z}{2}\right)} \quad \boxtimes$$

Tangens und cotangens :

$$\tan : \mathbb{C} \setminus \{ \tfrac{\pi}{2} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z} \} \to \mathbb{C}, \; z \mapsto \frac{\sin z}{\cos z}$$

$$\operatorname{cotan} : \mathbb{C} \setminus \{ \pi n \mid n \in \mathbb{Z} \} \to \mathbb{C}, \; z \mapsto \frac{\cos z}{\sin z}$$

Man rechnet aus $\sin' z = \cos z$, $\cos' z = -\sin z$

$$\tan'(z) = \frac{d \tan(z)}{dz} = \frac{1}{\cos^2(z)}$$

$$\operatorname{cotan}'(z) = \frac{d \operatorname{cotan}(z)}{dz} = -\frac{1}{\sin^2(z)}$$

Ü

$$\tan(z) = i\left(1 - \frac{2}{1+e^{2iz}}\right)$$

$$\operatorname{cotan}(z) = i\left(1 - \frac{2}{1-e^{2iz}}\right)$$

für die nächste Übung schon aufnehmen

Lemma 12.4

Ü

1) $$\frac{1}{\sin(z)} = \operatorname{cotan}(z) + \tan\left(\frac{z}{2}\right)$$

2) $$\operatorname{cotan}'(z) + (\operatorname{cotan}(z))^2 + 1 = 0$$

3) $$2 \operatorname{cotan}(2z) = \operatorname{cotan}(z) + \operatorname{cotan}\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{cotan}(z) - \tan(z)$$

Beweis von (2):

$$\operatorname{cotan}'(z) + (\operatorname{cotan}(z))^2 + 1$$

$$= -\frac{1}{\sin^2(z)} + \frac{\cos^2(z)}{\sin^2(z)} + \frac{\sin^2(z)}{\sin^2(z)}$$

$$= \frac{\cos^2(z) + \sin^2(z) - 1}{\sin^2(z)} = 0. \qquad \square$$

Die Arcus-Funktionen

Erinnerung Satz 9.1 (Umkehrsatz in $\mathbb{C}$)

Sei $f: U \to V$ holomorph, bijektiv ; $f'(z) \neq 0$ für $z \in U$

Dann ist $f^{-1}: V \to U$ ebenfalls holom. (ie f BIHOLOMORPH)

und $(f^{-1})'(\omega) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(\omega))}$.

Satz 12.5 Setze $\mathcal{U} := \{ x+iy \in \mathbb{C} \mid x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \}$

$$V := \mathbb{C} \setminus (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$$

Dann ist $\sin : \mathcal{U} \to V$ Biholomorph

mit holom. Umkehrfunktion $\arcsin : V \to \mathcal{U}$ so dass

$$\frac{d \arcsin(z)}{dz} = \frac{1}{\cos(\arcsin(z))}$$

Beweis: $\sin(z) = \dfrac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$

$$\sin(x+iy) = \frac{1}{2i}\left(\frac{e^{ix}}{e^{y}} - \frac{e^{y}}{e^{ix}}\right)$$

Wir beweisen: $\sin : U \to V$ ist injektiv.

Sei $(x+iy), (u+iv) \in \mathcal{U}$ wobei OBdA $y, v \geq 0$,

so dass $\sin(x+iy) = \sin(u+iv)$

Falls $y = 0$, dann $\sin(x+iy) = \sin(x) \in \mathbb{R}$, also muss auch $v = 0$ gelten und Injektivität folgt aus der Injektivität im Reellen. Also OBdA : $y, v > 0$.

$$\Rightarrow \frac{e^{ix}}{e^{y}} - \frac{e^{y}}{e^{ix}} = \frac{e^{iu}}{e^{v}} - \frac{e^{v}}{e^{iu}}$$

Setze $a = e^{ix}$, $b = e^{y}$, $c = e^{iu}$, $d = e^{v}$, alle $\neq 0$.

$$\Rightarrow \frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{c}{d} - \frac{d}{c} \Rightarrow \frac{ac+bd}{bc} = \frac{ac+bd}{ad} \quad (*)$$

Beachte: $\underset{e^{ix}}{|a|} = \underset{e^{iu}}{|c|} = 1$; $\underset{e^{y}}{b}, \underset{e^{v}}{d} > 1$; da $y, v \underset{\neq}{\geq} 0$.

Daher $|ac| < bd \Rightarrow ac + bd \neq 0$
und wir können die obige Ungleichung dadurch teilen.

$$\Rightarrow bc = ad$$

da $|a| = |c| = 1 \Rightarrow |b| = |d| \Rightarrow y = v$.

$\Rightarrow a = c \quad \Rightarrow x = u$.

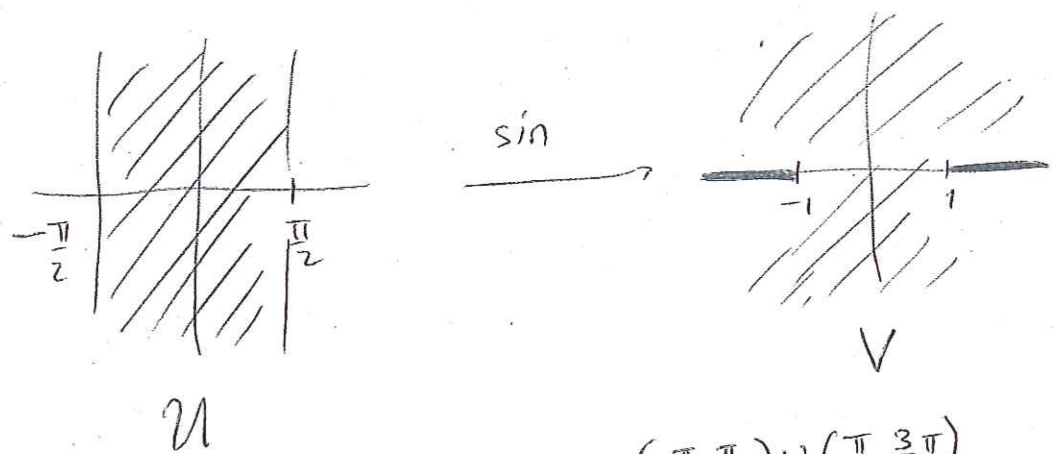
also ist $\sin: U \to V$ inj.

Wir beweisen nun: $\sin: U \to V$ ist surjektiv.

Beachte: $\sin(x+iy) = \frac{1}{2i}\left(\frac{e^{ix}}{e^{y}} - \frac{e^{y}}{e^{ix}}\right)$

$$= \frac{1}{2}\sin x \cdot \left(e^{y} + \frac{1}{e^{y}}\right) + \frac{i}{2}\cos x \cdot \left(e^{y} - \frac{1}{e^{y}}\right)$$

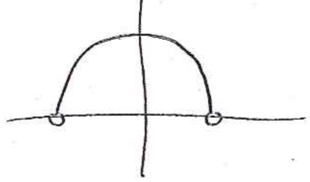
(hier sieht man dass für $\sin(x+iy) \in \mathbb{R}$ automatisch $y = 0$ folgt, da $\cos x \neq 0$ für $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$).

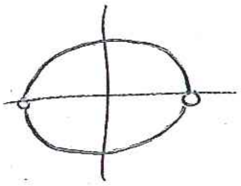


$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$

Falls $\tilde{U} := \{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) \in$ [illegible] $\}$, dann

$\sin : \tilde{\mathcal{U}} \to \mathbb{C} \setminus (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$ ist surjektiv, denn:

$\sin x + i \cos x$:  $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

 $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$

und durch $y \in \mathbb{R}$ lässt sich mittels $(e^y \pm \frac{1}{e^y})$ beliebige Streckung etc. erreichen. Beachte:

$\sin(\frac{\pi}{2} - z) = \sin(\frac{\pi}{2} + z)$ auf $z \in \mathbb{C}$, da die Identität für $z \in \mathbb{R}$ gilt und daher wegen Identitätssatz auf ganz $\mathbb{C}$. Daher:

$$\sin : \tilde{\mathcal{U}} \to \mathbb{C} \setminus (-\infty,-1] \cup [1,\infty) \text{ surj}$$

$$\Rightarrow \sin : \mathcal{U} \to \mathbb{C} \setminus (-\infty,-1] \cup [1,\infty) \text{ ebenfalls surj.}$$

Also $\sin : \mathcal{U} \to V$ bij, $\sin'(z) = \cos(z) \neq 0$ auf $z \in \mathcal{U}$ und daher ist nach Umkehrsatz 9.1 $\sin^{-1} = \arcsin$ ebenfalls holomorph mit angegebener Ableitung.

$\boxed{\checkmark}$

<u>Satz 12.6</u> Setze $\mathcal{U} := \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \}$

$V := \mathbb{C} \setminus \{ iy \mid y \in (-\infty,-1] \cup [1,\infty) \}$

$\tan : \mathcal{U} \to V$ ist biholomorph

$$\arctan'(z) = \frac{1}{1+z^2}, \quad \arctan(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} z^{2k+1}$$

Potenzreihenentw. auf $B_1(0)$.

Beweis: Surjektivität: Sei $\omega \in V$

$$\Rightarrow \omega^2 \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$$

$$\Rightarrow \frac{\omega^2}{1+\omega^2} \in \mathbb{C} \setminus [1, \infty)$$

⌈ sonst gäbe es ja ein $c \in [1, \infty)$ so dass

$$\frac{\omega^2}{1+\omega^2} = c \Rightarrow \omega^2 = (1+\omega^2)c$$

$$\Rightarrow (1-c)\omega^2 = c \Rightarrow \omega^2 = \frac{c}{1-c}$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{-c}{c-1} \in (-\infty, -1] \ \lightning$$ ⌋

Nun gilt: $\sin : \mathcal{U} \to \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ bijektiv

$z \mapsto z^2 : \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \to \mathbb{C} \setminus [1, \infty)$ surj

also ist $\sin^2 : \mathcal{U} \to \mathbb{C} \setminus [1, \infty)$ surj

und es existiert $z \in \mathcal{U}$ so dass

$$\sin^2(z) = \frac{\omega^2}{1+\omega^2}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2(z) + \omega^2 \cancel{\sin^2(z)} = \omega^2 = \omega^2 (\cancel{\sin^2(z)} + \cos^2(z))$$

$$\Leftrightarrow \sin^2(z) = \omega^2 \cos^2(z)$$

$$\Leftrightarrow \tan^2(z) = \omega^2 \Leftrightarrow \tan(z) = \pm \omega.$$

wegen $\tan(-z) = -\tan(z)$ findet man also Urbild zu $+\omega$ und $-\omega$. tan surj. ✓

Injektivität: $z, \tilde{z} \in \mathcal{U}$ mit $\tan(z) = \tan(\tilde{z})$

$$\Rightarrow \tan^2(z) = \tan^2(\tilde{z})$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2(z)}{\cos^2(z)} = \frac{\sin^2(\tilde{z})}{\cos^2(\tilde{z})}$$

$$\Rightarrow \sin^2(z)(1 - \sin^2(\tilde{z})) = \sin^2(\tilde{z})(1 - \sin^2(z))$$

ausmultiplizieren und kürzen

$$\Rightarrow \sin^2(z) = \sin^2(\tilde{z})$$

$$\Rightarrow \sin z = \pm \sin \tilde{z}$$

$$\Rightarrow z = \tilde{z},$$ da sin auf $\mathcal{U}$ injektiv nach vorherigem Satz 12.5.

Damit ist $\tan : \mathcal{U} \to V$ biholomorph, da $\tan'(z) \neq 0$.

Ferner gilt:

$$\arctan'(z) = \frac{1}{\tan'(\arctan z)} = \frac{1}{(1+\tan^2)(\arctan z)}$$

$$= \frac{1}{1+z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot z^{2k}$$

Daraus ergibt sich durch Aufleiten die Pot-Reihenentw.:

$$\arctan(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} z^{2k+1} + C_1$$

Die Konstante $C_1 = \arctan(0) = 0$, da $\tan(0) = 0$.

$\boxed{/\!/}$

Die Gamma-Funktion

$t^{z-1} = e^{(z-1)\log t}$

$$\Gamma(z) := \lim_{\substack{R\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \int_{\varepsilon}^{R} t^{z-1} e^{-t}\, dt; \quad \mathrm{Re}(z) > 0$$

- Limes $R \to \infty$ exists since $|t^{z-1} e^{-t}| = t^{\mathrm{Re}(z)-1} e^{-t} \leq C_1 e^{-t/2}$
- Limes $\varepsilon \to 0$ exists since $|t^{z-1}| = t^{\mathrm{Re}(z)-1}$ is integrable at $t=0$ for $\mathrm{Re}(z) > 0$.

$$\left|\frac{d\,t^{z-1}}{dz}e^{-t}\right| = \left|\log t \cdot t^{z-1} e^{-t}\right| = |\log t| \cdot t^{\mathrm{Re}(z)-1} e^{-t}$$

ist immernoch $[0,\infty)$ - integrierbar für $\mathrm{Re}(z) > 0$

und daher gilt:

<u>Lemma 12.7</u> $\Gamma(z)$ ist holomorph für $\mathrm{Re}(z) > 0$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\,dt$$

$$\frac{d\Gamma(z)}{dz} = \int_0^\infty \log t \cdot t^{z-1} e^{-t}\,dt$$

Für spezielle Werte $z = n \in \mathbb{N}$ (≥ 1) gilt:

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t}\,dt = (-1)^{n-1} \int_0^\infty t^{n-1} \frac{d^{(n-1)}}{dt^{n-1}}(e^{-t})\,dt$$

$$= (-1)^{n-1} \left\{ \sum_{k=1}^{n-2} (-1)^{k+1} \cdot \frac{d^{(k)}}{dt^{(k)}}(t^{n-1}) \cdot \frac{d^{(n-1-k)}}{dt^{(n-1-k)}}(e^{-t}) \Big|_0^\infty \right.$$

Randterme sind $= 0$

$$\left. + (-1)^{n-1} \cdot \int_0^\infty \frac{d^{(n-1)}}{dt^{(n-1)}}(t^{n-1}) \cdot e^{-t}\,dt \right\}$$

$$= \int_0^\infty (n-1)!\, e^{-t}\,dt = (n-1)!\, \frac{e^{-t}}{(-1)}\Big|_0^\infty$$

$$= (n-1)!$$

Wir haben bewiesen: $\Gamma(n) = (n-1)!$

Also ist die (holomorphe) Gamma-Funktion eine Verallgemeinerung der bekannten Fakultät!

Theorem 12.8 $\Gamma(z)$ besitzt eine meromorphe Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$ mit einfachen Polstellen an $0, -1, -2, -3, \dots$

Beweis: $\Gamma(z) = \int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt + \int_1^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$, $\operatorname{Re}(z) > 0$

Das zweite Integral ist holomorph für alle $z \in \mathbb{C}$, da $|t^{z-1} e^{-t}| = |t^{\operatorname{Re}(z)-1} e^{-t}|$ sowie $|\log t \cdot t^{z-1} e^{-t}|$ für alle $z \in \mathbb{C}$ auf $[1, \infty)$ integrierbar sind.

Wir konstruieren eine meromorphe Fortsetzung für $\int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt$

$$e^{-t} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(-t)^k}{k!} + \sum_{k=N}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!}$$

$$\int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt = \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^1 t^{z-1} \frac{(-t)^k}{k!} dt + \int_0^1 t^{z-1} \sum_{k=N}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{t^{z+k}}{z+k} \Big|_0^1 + \int_0^1 t^{z-1} \sum_{k=N}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!} dt$$

Während wir a priori $\operatorname{Re}(z) > 0$ angenommen haben, sieht man an der neuen Darstellung dass für $\operatorname{Re}(z) > -(N-1)$

$$\int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{z+k} + \text{holomorph}$$

D.h. das Integral ist meromorph auf $\operatorname{Re}(z) > -N+1$ mit einfachen Polstellen an $z = -k$, $k = 0, \dots, N-1$.
Ergebnis folgt iterativ für $N \to \infty$. $\boxtimes$

Die Riemannsche Zeta-Funktion

Erinnerung aus der Analysis-Vorlesung:

Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} < \infty$ konv. für $s \underset{\neq}{\geq} 1$.

<u>Definition 12.9</u> Die Riemannsche Zeta-Funktion

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad Re(s) > 1$$

Die komplexe Reihe konvergiert $(n^s = e^{s \log n})$

denn $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n^s}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|e^{s \ln n}|} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|e^{Re(s) \cdot \ln(n)}|}$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{Re(s)}} < \infty \text{ für } Re(s) > 1.$$

$\zeta(s)$ ist für $Re(s)>1$ holomorph, da $\zeta'(s) = \sum \frac{1}{n^s \ln n}$ ebenfalls konv.

$$\boxed{\text{Am Ende des Abschnitts bietet sich für jedermann die Gelegenheit 1. Million Dollar zu verdienen}}$$

<u>Integraldarstellung von $\zeta(s)$:</u>

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt \underset{\substack{\uparrow \\ t = nx}}{=} n^s \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-nx} dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-nx} dx$$

$$\Rightarrow \zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-nx} dx$$

Erinnerung geom. Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ für $|z|<1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} - z^0 = \frac{1}{1-z} - 1 = \frac{z}{1-z}$$

Für $x>0$ ist $e^{-x}<1$ und daher gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} = \sum_{n=1}^{\infty} (\underbrace{e^{-x}}_{=z})^n = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{1}{e^x-1}$$

Für $\mathrm{Re}(s)>1$ ist $\left(x^{s-1}\frac{1}{e^x-1}\right)$ integrierbar auf $(0,\infty)$

Daher lässt sich für $\mathrm{Re}(s)>1$ $\sum_{n=1}^{\infty}$ und $\int_0^{\infty}$ vertausche und wir erhalten:

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} x^{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}\, dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} t^{s-1} \frac{1}{e^t-1}\, dt \quad , \mathrm{Re}(s)>1$$

<u>Theorem 12.10</u> Die Riemannsche Zeta-Funktion

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} t^{s-1}\frac{1}{e^t-1}\, dt \quad , \mathrm{Re}(s)>1$$

besitzt eine meromorphe Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$ mit einfachen Polstellen an $s=1,0,-1,-2,\ldots$. Die Polstelle an $s=0$ ist hebbar.

<u>Beweis</u>: Wie im Beweis zu Gamma-Funktion

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^1 t^{s-1}\frac{1}{e^t-1}\,dt + \int_1^\infty t^{s-1}\frac{1}{e^t-1}\,dt$$

Das zweite Integral ist holomorph für alle $s \in \mathbb{C}$.

Für das erste Integral setze ~~[illegible]~~ die Reihe / Taylorreihe von $\frac{t}{e^t-1}$ an $t=0$ ein:

$$\frac{t}{e^t-1} \overset{!}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} t^k,$$

B_k – "Bernoulli-Zahlen"

$$\int_0^1 t^{s-2}\frac{1}{e^t-1} = \sum_{k=0}^{N-1}\frac{B_k}{k!}\int_0^1 t^{s+k}\,dt + \int_0^1 t^{s-2}\sum_{k=N}^{\infty}\frac{B_k}{k!}t^k\,dt$$

~~Der N-te Summand~~

$$= \sum_{k=0}^{N-1}\frac{B_k}{k!}\left.\frac{t^{s+k-1}}{s+k-1}\right|_0^1 + \int_0^1 t^{s-2}\sum_{k=N}^{\infty}\frac{B_k}{k!}t^k\,dt$$

Der 2-te Term ist holomorph für $Re(s) > -N+1$

Also ergibt sich für $Re(s) > -N+1$

$$\int_0^1 t^{s-1}\frac{1}{e^t-1}\,dt = \sum_{k=0}^{N-1}\frac{B_k}{k!}\frac{1}{s+k-1} + \text{holomorph}$$

mit Polstellen an $s = -k+1$, $k = 0, \dots, N-1$

Theorem folgt mit $N \to \infty$. $s=0$ ist hebbar, da $\Gamma(s)$ an $s=0$ eine PST, also $1/\Gamma(s)$ eine Nullstelle besitzt. (Beachte: $\Gamma(s)$ hat <u>keine</u> NST.)

$\boxtimes$

1. Million-Frage: Wo befinden sich die Nullstellen der meromorphen Fortsetzung $\zeta(s)$. Riemann'sche Vermutung: NST sind alle auf

$$\{ s \in \mathbb{C} \mid Re(s) = \tfrac{1}{2} \}.$$