Prof. Dr. Boris Vertman
M. Sc. Artem Nepechiy Wintersemester 2014

Geometrische Analysis

Blatt 2

Aufgabe 1. (Hodge Operator) (5 Punkte)

(i) Beweisen Sie die Identität:

$$\star dx_j = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \cdot g^{kj} \cdot |\det(g_{ij})|^{\frac{1}{2}} \cdot dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_k} \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

(ii) Zeigen Sie aus der Definition, dass $\mathrm{div}^g(X) = \star d \star X^\flat$ auf $\mathbb{R}^n$ mit der standard euklidischen Metrik gilt.

(iii) Zeigen Sie aus der Definition, dass $\mathrm{rot}^g(X) = (\star dX^\flat)^\sharp$ auf $\mathbb{R}^n$ mit der standard euklidischen Metrik gilt.

Aufgabe 2. (Pullback) (5 Punkte)

In jedem der folgenden Fälle ist $F : M \to N$ eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltikeiten und ω eine Differentialform auf N. Berechnen Sie $d\omega$, $F^*\omega$ und weisen Sie durch explizites Nachrechnen $F^*(d\omega) = d(F^*\omega)$ nach.

(i) $M = N = \mathbb{R}^2$;
$F(s,t) = (st, e^t)$;
$\omega = xdy$.

(ii) $M = \mathbb{R}^2, N = \mathbb{R}^3$;
$F(\theta,\varphi) = ([\cos(\varphi) + 2] \cdot \cos(\theta), [\cos(\varphi) + 2] \cdot \sin(\theta), \sin(\varphi))$;
$\omega = ydz \wedge dx$.

(iii) $M = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\{, N = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$;
$F(u,v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2})$;
$$\omega = \frac{xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Aufgabe 3. (De Rham Komplex im Minkowskiraum) (5 Punkte)

Seien t, x_1, x_2 und x_3 die kartesischen Koordinaten des $\mathbb{R}^4$ mit der Lorentzmetrik

$$g = -dt \otimes dt + dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 + dx^3 \otimes dx^3.$$

Seien grad^g, rot^g, Ψ und div^g die Abbildungen, die das folgende Diagramm kommutativ machen. Berechne grad^g, rot^g, Ψ und div^g in kartesischen Koordinaten. Benutze, wenn möglich, grad, div, rot, $\star$ (ohne Zusatz) im $\mathbb{R}^3$ aus der Vorlesung.

$$\begin{tikzcd}
\Omega^0\mathbb{R}^4 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "="] & \Omega^1\mathbb{R}^4 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "\sharp^g"] & \Omega^2\mathbb{R}^4 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, "\Phi^{-1}"] & \Omega^3\mathbb{R}^4 \arrow[r, "d_3"] \arrow[d, "\sharp^g \circ \star^g"] & \Omega^4\mathbb{R}^4 \arrow[d, "-\star^g"] \\
C^\infty\mathbb{R}^4 \arrow[r, "\mathrm{grad}^g"] & C^\infty T\mathbb{R}^4 \arrow[r, "\mathrm{rot}^g"] & C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}^\infty T\mathbb{R}^3)^2 \arrow[r, "\Psi"] & C^\infty T\mathbb{R}^4 \arrow[r, "\mathrm{div}^g"] & C^\infty\mathbb{R}^4
\end{tikzcd}$$

wobei $\Phi(X,Y) := dt \wedge X^\flat + \star Y^\flat$. **Bitte umblätern**

Aufgabe 4. (Kohomologie) (5 Punkte)

(i) Es sei $E \to F \to G$ eine exakte Sequenz von $\mathbb{K}$-Vektorräumen und E und G seien endlichdimensional. Zeige, dass F ebenfalls endlichdimensional ist.

(ii) Seien $E^i,\ i = 0, ..., n$ endlich-dimensionale Vektorräume und $d_i : E^i \to E^{i+1},\ i = 0, ..., n-1$ lineare Abbildungen. Die Sequenz

$$(E^\bullet, d_\bullet): \ 0 \to E^0 \xrightarrow{d_0} E^1 \xrightarrow{d_1} \cdots \xrightarrow{d_{n-1}} E^n \to 0,$$

heißt ein Komplex der Länge n, falls $d_{i+1} \circ d_i = 0$ für alle $i = 0, ..., n-1$. Wir definieren die Kohomologie des Komplexes als

$$H^i(E^\bullet, d_\bullet) := \frac{\ker d_i : E^i \to E^{i+1}}{\mathrm{im} d_{i-1} : E^{i-1} \to E^i}.$$

Zeigen Sie, dass gilt

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim E^i = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim H^i(E^\bullet).$$

Insbesondere gilt

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim E^i = 0,$$

wenn die Sequenz $(E^\bullet, d_\bullet)$ exakt ist.