Prof. Dr. Boris Vertman
M. Sc. Artem Nepechiy

Wintersemester 2014

Geometrische Analysis

Blatt 4

Aufgabe 1. (5 Punkte)

Seien $P, Q \in \mathrm{Diff}(E, F)$. Schreibe lokal

$$P = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha D^\alpha \quad \text{und} \quad Q = \sum_{|\beta| \leq l} b_\beta D^\beta.$$

Zeige, dass

$$\sigma_{P \circ Q} = \sum_{|\gamma| \leq k} \frac{i^{|\gamma|}}{\gamma!} \left[D_\xi^\gamma \sigma_P(x, \xi) \right] \left[D_x^\gamma \sigma_Q(x, \xi) \right].$$

Aufgabe 2. (5 Punkte)

Sei $D\colon \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ ein lineare und lokale Abbildung. Ferner gelte für alle $f \in C^\infty(M)$, dass

$$\begin{aligned} \mathrm{ad} f(D) : \Gamma(E) &\to \Gamma(F) \\ s &\mapsto f(Ds) - D(fs) \end{aligned}$$

ein Differentialoperator der Ordnung k ist. Zeige, dass D ein Differentialoperator der Ordnung $k+1$ ist.

Aufgabe 3. (Hauptsymbole) (5 Punkte)

(i) Berechne das Hauptsymbol der Operatoren $\mathrm{div}, \mathrm{grad}, \mathrm{grad} \circ \mathrm{div}$.

(ii) Berechne das Hauptsymbol von d^t und das des Gauß-Bonnet Operators $D = d + d^t$.

Aufgabe 4. (Alternative Definition von Symbolen) (5 Punkte)

Sei $D \in \mathrm{Diff}^k(E, F)$. Seien $p \in M$, $\xi \in T_p^* M$, $e \in E_p$. Wähle $f \in C_0^\infty(M)$, $s \in C_0^\infty(E)$ mit $f(p) = 0$, $df|_p = \xi$, $s(p) = e$. Dann ist das Hauptsymbol von D definiert durch

$$\sigma_D^k(p, \xi)e := \frac{i^k}{k!} D(f^k s)(p).$$

Wähle $g \in C_0^\infty(M)$ mit $dg|_p = \xi$ und $g(p)$ beliebig. Zeige:

(i) $\sigma_D^k(p, \xi)e = \lim_{t \to \infty} t^{-k} \left[e^{-itg} D(e^{itg} s) \right](p)$.

(ii) $\sigma_D^k(p, \xi)e = \dfrac{(-i)^k}{k!} [(\mathrm{ad} g)^k D] s(p)$.