Prof. Dr. Boris Vertman
M. Sc. Artem Nepechiy

Wintersemester 2014

Geometrische Analysis

Blatt 6

Aufgabe 1. (5 Punkte)

Sei (ρ_n) eine lokalendliche Familie (d.h. zu einem Kompaktum $K \subset \Omega$ gibt es nur endlich viele Indizes mit $\operatorname{supp} \rho_n \cap K \neq \emptyset$). Des Weiteren seien $N_n \in \mathbb{Z}_+$. Zeige, dass

$$p(f) := \sum_{n=1}^{\infty} p_{N_n}(\rho_n f)$$

eine stetige Halbnorm auf $\mathscr{D}(\Omega)$ ist, und dass jede stetige Halbnorm auf $\mathscr{D}(\Omega)$ durch ein solches p dominiert wird.

Aufgabe 2. Konstruiere, analog zu $\mathscr{D}(\Omega)$, eine LF-Raum-Struktur auf

$$L^1_{\text{comp}}(\Omega) = \{f \in L^1(\Omega) \mid \operatorname{supp} f \text{ kompakt}\}$$

bezüglich der Filtrierung

$$L^1(K_1) \subset L^1(K_2) \subset \ldots \subset L^1_{\text{comp}}(\Omega).$$

Dabei ist $K_1 \subset K_2 \subset \ldots$ eine kompakte Ausschöpfung von Ω. Charakterisiere die Konvergenz in $L^1_{\text{comp}}(\Omega)$.

Aufgabe 3. Sei

$$\begin{aligned} T\colon\ L^1_{\text{loc}}(\Omega) &\to \mathscr{D}'(\Omega) \\ f &\mapsto T_f, \end{aligned}$$

wobei die Topologie auf $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ von den Halbnormen $\|f\|_{1,K} := \int_K |f|$ erzeugt wird und $T_f(\varphi) := \int_\Omega f\varphi$. Zeige:

(i) $T_f \in \mathscr{D}'(\Omega)$,

(ii) T injektiv, und

(iii) T stetig.

Aufgabe 4. (5 Punkte)

Sei $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ mit

$$f(x) := \begin{cases} \log x, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Zeige, dass die distributive Ableitung von f gegeben ist durch

$$\langle \partial f, \varphi \rangle = \lim_{R \to \infty} \left(\int_0^R \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx + \varphi(0) \log R \right).$$

Finde eine möglichst große offene Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}$ so, dass dort die distributive Ableitung mit der gewöhnlichen Ableitung übereinstimmt.

Aufgabe 5. (5 Punkte)

Sei $T_N(y) := \int_{-N}^{N} e^{-ixy} dx$ und zeige

$$\lim_{N \to \infty} T_N = (2\pi)\delta_0 \quad \text{in } \mathscr{D}'(\mathbb{R}).$$