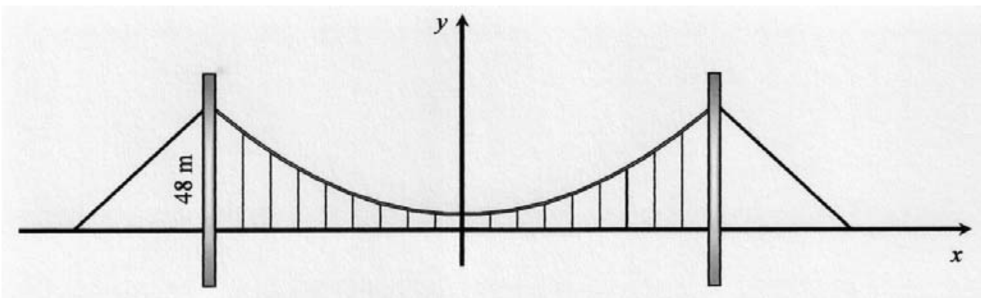
Dr. Johanna Neubrand
Hochschule Vechta

Prof. Dr. Michael Neubrand
Carl-von-Ossietzky-Universität Oldenburg

Mathematikdidaktische Analysen der zentralen Prüfungen 2008 in Mathematik am Ende der Klasse 10 in Nordrhein-Westfalen

Analysen von Aufgabenstellungen und Aufgabenbearbeitungen. Hinweise zu Aufgabenkonstruktion und zur Fachunterrichtsentwicklung



Vorwort

Analysen (zentraler) Prüfungen können unter verschiedenen Gesichtspunkten angelegt werden, etwa in Hinblick auf das Erreichen administrativ vorgegebener Ausbildungsziele, durch Differenzierungen nach verschiedenen Gruppen von Schülerinnen und Schülern (Schulformen, Geschlecht, etc.), nach organisatorischen und logistischen Problemen bei der Durchführung, mit einem Fokus auf die Korrekturverfahren und ihre Bewährung, usw..

Die hier vorgelegte Analyse der zentralen Prüfungen des Jahres 2008 für die Klassen 10 der verschiedenen Schulformen in Nordrhein-Westfalen („ZP-10“) hat – den Verabredungen im Vorfeld entsprechend – einen spezifischen Schwerpunkt. Sie ist in erster Linie *mathematikdidaktisch* orientiert. Im Mittelpunkt unserer Überlegungen stehen Aussagen, Analysen, Kritikpunkte und konstruktive Hinweise

– zum Aufgaben-Material unter fachlicher und fachdidaktischer Perspektive,
– zu den Vorbereitungs- und Korrekturvorgaben an die Lehrerinnen und Lehrer mit ihren mathematikdidaktischen Implikationen,
– zu den tatsächlich inhaltlich gezeigten Lösungen der Schülerinnen und Schüler,
– zur Einschätzung der Bedeutung der zentralen Prüfungen als Grundlage für den Übertritt in weiterführende Schulen,

und analoge Fragen.

Rein statistisch-deskriptive Fragen treten, abgesehen von einem Überblick über Notengebung und Lösungsquoten, bei dem hier eingenommenen mathematikdidaktischen Blickwinkel zurück, und sie können es auch, denn solche Daten liegen mit dem „Modul I“ (siehe unten) dem Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen bereits vor.

Somit zielt dieser Bericht auf beides,

* auf eine analytische Zugehensweise und
* auf Schlussfolgerungen, die konstruktiv verwendet werden können für die künftige Aufgaben-Entwicklung und für allgemeine Zielausrichtungen des Mathematikunterrichts.

Wir gehen daher mit ähnlichen Absichten an die Analysen heran, wie sie in einem internen Arbeitspapier des Ministeriums für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen mit Beispielaufgaben aus der ZP-10 im Jahr 2007 (Büchter & Pallack, 2009) formuliert wurden. Dort wird auf die folgenden bei der Analyse von zentralen Prüfungen zu betrachtenden Fragenkomplexe hingewiesen, die wir in dieser Analyse jedoch spezifisch erweitern:

– Welche impliziten „Standards“ werden durch die Prüfungsarbeiten für den Mittleren Schulabschluss gesetzt?
– Inwieweit werden – so unsere Erweiterung dieser Fragestellung– bereits durch die Aufgaben-*Stellung* solche Standards impliziert?

– Sind diese Standards fachdidaktisch tragfähig?

– Zeigen – abermals weiter als im ministeriumsinternen Arbeitspapier gefragt – die *konkreten Lösungen* der Schülerinnen und Schüler auf, wie die gezeigten Leistungen mathematikdidaktisch einzuschätzen sind?

– Lassen sich somit aus den Ergebnissen der zentralen Prüfungen prognostisch Folgerungen ziehen (a) für die in Zukunft zu erwartende Aufgaben-Schwierigkeiten, (b) für die konkreten Prozesse bei der Aufgabenkonstruktion in den Folgejahren, (c) für die Entwicklung des Mathematikunterrichts und (c) generell in Hinblick auf das Verstehen und Erfassen von Schülerleistungen?

Die Voraussetzung für solche spezifischen Analysen – und damit Teil unseres Analysevorhabens – sind Verwendung, ggf. Adaption oder sogar Konstruktion von Bewertungsinstrumenten, die eine mathematikdidaktisch fundierte Einordnung der vorliegenden zentralen Prüfungen des Jahres 2008 erlauben. Ein solches Bewertungsinstrument legen wir hier vor. Es orientiert sich am aktuellen Erkenntnisstand der Mathematikdidaktik, aber auch in Hinblick auf die Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts an den durch die Bildungsstandards in Deutschland gesetzten Rahmenbedingungen. Wir hoffen, dass dieses Bewertungsinstrument auch über die hier durchgeführte spezielle Analyse für das Land Nordrhein-Westfalen hinaus nützlich sein wird.

Vechta und Oldenburg im Juni 2010

Johanna Neubrand und Michael Neubrand

Übersicht

Ausgangssituation der zentralen Prüfungen ZP-10-2008 in Nordrhein-Westfalen und Grundlagen der Analysen

Analysen der Aufgabenstellungen

Analysen ausgewählter Schülerbearbeitungen

Resümee

Dokumentation: Die Vorgaben, Aufgaben und Auswertungsanleitungen

Ausgangssituation der zentralen Prüfungen ZP-10-2008 in Nordrhein-Westfalen

1 Grundlagen der Analysen der zentralen Prüfungen in Mathematik in Nordrhein-Westfalen

1.1 Ausgangslage

Mehrere Bundesländer, darunter Nordrhein-Westfalen, haben in den letzten Jahren – wohl in Reaktion auf die Ergebnisse internationaler Vergleiche wie TIMSS und PISA (Baumert & al., 1997; 2001), aber auch in Hinblick auf eine Umsetzung des Programms der bundesweiten Bildungsstandards (Klieme, 2003; KMK, 2004; Blum & al., 2006; vgl. detaillierter zum historischen Ablauf J. Neubrand, 2009) – zentrale Abschlussprüfungen auf der Ebene des Hauptschulabschlusses und des Mittleren Schulabschlusses eingerichtet. Anders als in Bundesländern, in denen solche Regelungen traditionellerweise seit langem bestehen, beispielsweise die zentralen Realschulabschlüsse in Bayern oder Baden-Württemberg, fehlt naturgemäß in Nordrhein-Westfalen noch die langjährige Erfahrung in Konstruktion, Gestaltung, Durchführung und Auswertung solcher Prüfungen. Mit der Einführung zentraler Prüfungen wurden daher vom Ministerium für Schule und Weiterbildung genauere Analysen der Ergebnisse verbunden, um Trends und Problembereiche herausarbeiten zu können.

Für einen Analyseansatz, der in erster Linie die mathematikdidaktische Perspektive einnimmt, sind die zentralen Prüfungen in allen ihren Phasen zu betrachten:

- In die *Konstruktion* zentraler Prüfungen fließen die Kernlehrpläne des Landes ein. Sie geben den inhaltlichen Maßstab für die Aufgaben vor und an ihnen müssen sich auch die Ergebnisse messen lassen. Konkret orientieren sich die Aufgaben für die zentralen Prüfungen in den Klassen 10 – kurz: „ZP-10“ – an den seit 2004 in Nordrhein-Westfalen durchgeführten Lernstandserhebungen (MSW, 2007). Die Kerncurricula ihrerseits orientieren sich an den bundesweit definierten Bildungsstandards (KMK, 2003, 2004). Diese geben also die umfassendere Orientierung ab. Solche curricularen Orientierungen sind einer der Analysehintergründe, einen weiteren Hintergrund bilden aktuell diskutierte mathematikdidaktische Konzepte und Erkenntnisse, mittels derer eine inhaltliche Bewertung der Prüfungen vorgenommen werden kann.
- Die *Durchführung* von zentralen Prüfungen beinhaltet als ersten Schritt eine geeignete Vorbereitung der Lehrerinnen und Lehrer auf die kommende Prüfung. Das Ministerium gibt dazu sog. „Vorgaben“ heraus. Diese umschreiben den Rahmen, auf den die zentralen Prüfungen an den Schulen treffen. Sie sollten daher ebenfalls in die Gesamtbeurteilung einfließen.
- Die *Auswertung* der zentralen Prüfungen wird zunächst für die teilnehmenden Schülerinnen und Schüler von den Fach-Lehrerinnen und -Lehrern der jeweiligen Klassen verantwortet. Es gibt eine Erst- und eine Zweitkorrektur. Das Bewertungsverhalten sollte wenigstens exemplarisch bei einzelnen Schülerlösungen betrachtet werden.
- Die *Interpretation* der Ergebnisse der Schülerinnen und Schüler bei den zentralen Prüfungen sollte schließlich so erfolgen, dass auch Rückschlüsse auf unterrichtliche Wirkungen möglich werden. Dazu ist aber ein übergreifender mathematikdidaktischer Standpunkt erforderlich. Vor einem solchen didaktischen Hintergrund sollten dann ausgewählte Lösungen von Schülerinnen und Schülern analysiert werden, damit ein Eindruck davon entstehen kann, welche inhaltlichen Leistungen und Kompetenzen von den Schülerinnen und Schülern erwartet, gezeigt und schließlich bewertet werden.

Das zuständige Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen hat die erwünschten Analysen in zwei Teilkomponenten gegliedert. Laut einer Rundverfügung vom 19.10.2007 werden die Ergebnisse der einzelnen Schulen vom Ministerium selbst in einem sog. Modul 1 der Evaluation landesweit erhoben und evaluiert. Die Abschlussnoten, die Prüfungsnoten sowie die Vornoten (in den Fächern Deutsch, der ersten Fremdsprachen und Mathematik) werden dabei zentral erfasst und ausgewertet. Diese Daten sollen einen landesweiten Überblick über die erzielten Leistungen liefern. Sie liegen dem Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen intern vor.

Zum Durchgang 2008 der zentralen Prüfungen in den 10. Klassen wird zusätzlich in einem zweiten „Modul“ eine Zufallsstichprobe von (in der administrativen Vorgabe) insgesamt 160 Schulen näher betrachtet. Die fachlichen Leistungen in den Fächern Deutsch, Englisch und Mathematik sollen dabei differenziert erfasst werden. Für das Fach Mathematik greifen wir in diesem Bericht auf Daten und Material aus diesem „Modul 2“ zu. Ausdrückliches Ziel des Ministeriums ist es, aus dem empirischen Material dieser Stichprobe zu einer fachlichen Einschätzung des Mathematikunterrichts in Nordrhein-Westfalen zu kommen, so dass die Ergebnisse schließlich auch zur langfristigen Unterrichtsentwicklung genutzt werden können.

Die zentralen Prüfungen am Ende der Klasse 10 in Nordrhein-Westfalen sind indes keine allein die Noten bestimmenden Abschlussprüfungen. Neben den in der ZP-10 erzielten Leistungen zählen für die Endnote auch die Leistungen während des Schuljahres. In der Regel gehen die bei der schriftlichen zentralen Prüfung erworbenen Beurteilungen und die Vornote aus dem Mathematikunterricht je zur Hälfte in die Endnote ein; Einzelheiten regeln detaillierte Bestimmungen[1].

Diese Regelungen machen klar, dass die zentralen Prüfungen einerseits für die einzelnen Schülerinnen und Schüler ein wichtiges Element für ihren Schulabschluss sind, dass darüber hinaus aber die zentralen Prüfungen eine wichtige Rolle spielen für die permanente Qualitätsentwicklung des Mathematikunterrichts im Land. Drei Funktionen hierfür nennt das Ministerium selbst[2]: Auf der individuellen Ebene fungieren zentrale Prüfungen als Elemente der Leistungserziehung; im Hinblick auf den Unterricht sollen zentrale Prüfungen Aufschlüsse über Qualität und Erfolg in den jeweiligen Fächern geben und für die Transparenz der Anforderungen sorgen; auf der Systemebene werden Hinweise auf die Qualität des Schulsystems in Nordrhein-Westfalen insgesamt erwartet.

[1] http://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/zp10/

[2] http://www.schulministerium.nrw.de/BP/Schulsystem/Qualitaetssicherung/ZP_Kl_10/index.html

1.2 Rahmenbedingungen der zentralen Prüfungen in Mathematik in Nordrhein-Westfalen

1.2.1 Schulformen und zugeordnete Prüfungsvarianten

In Nordrhein-Westfalen gestaltet sich die Durchführung zentraler Prüfungen recht komplex, weil auf die einzelnen Schulformen und ihre spezifischen Ausprägungen Rücksicht zu nehmen ist. Diese Schulformen sind (jeweils für die Klassenstufe 10):

– *Hauptschule, Typ A* mit den Schwerpunkten in Naturwissenschaften und Arbeitslehre. Nach erfolgreichem Abschluss der Klasse 10 Typ A wird der „Hauptschulabschluss nach Klasse 10“ (HSA-10) vergeben.

– *Hauptschule, Typ B* mit den Schwerpunkten Deutsch, Englisch und Mathematik. Der erfolgreiche Besuch der Klasse 10 Typ B ergibt den Mittleren Schulabschluss (Fachoberschulreife) (MSA). Sind alle Leistungen sogar mindestens befriedigend, berechtigt dies zum Besuch der gymnasialen Oberstufe (an Gymnasien, Gesamtschulen oder Berufskollegs).

– *Gesamtschule*, die alle Abschlüsse der Sekundarstufe I ermöglicht, auch den „Hauptschulabschluss“ und den „Hauptschulabschluss nach Klasse 10“. Im Fach Mathematik (und entsprechend in anderen Kernfächern) werden *Grundkurse* und *Erweiterungskurse* angeboten. Die zentralen Prüfungen und die vergebenen Abschlüsse richten sich nach den besuchten Kursen. Nach erfolgreichem Besuch der Klasse 10 wird jedenfalls der „Hauptschulabschluss nach Klasse 10“ vergeben. Der „Mittlere Schulabschluss“ (Fachoberschulreife) setzt mindestens ausreichende Leistungen in zwei Erweiterungskursen, befriedigende Leistungen in den Grundkursen, zweimal befriedigende und ausreichende Leistungen in den anderen Fächern voraus. Dieser Abschluss beinhaltet dann auch die Möglichkeit des Übertritts in die gymnasiale Oberstufe, falls die Leistungen in drei Erweiterungskursen und in den übrigen Fächern mindestens befriedigend und im Grundkurs mindestens gut sind.

– *Realschule*, die ebenfalls alle Abschlüsse der Sekundarstufe I ermöglicht. Der Mittlere Schulabschluss (Fachoberschulreife) wird nach erfolgreichem Besuch der Klasse 10 erteilt. Bei mindestens befriedigenden Leistungen in allen Fächern steht auch der Übergang zur gymnasialen Oberstufe offen.

– Das *Gymnasium* bietet nach erfolgreicher Klasse 10 alle Abschlüsse der Sekundarstufe I. Es wird die Berechtigung zum Besuch der gymnasialen Oberstufe vergeben.

Dieser Schulformgliederung entsprechend sind die zentralen Prüfungen zu organisieren. Es werden jedoch – wohl aus Praktikabilitätsgründen – nicht alle sechs möglichen Varianten (Hauptschule/Typ A, Hauptschule/Typ B, Gesamtschule/Grundkurs, Gesamtschule/Erweiterungskurs, Realschule, Gymnasium) realisiert, sondern es werden die folgenden Varianten der zentralen Prüfungen durchgeführt:

Der **1. Prüfungsteil** (Basiskompetenzen; siehe 2.1.2) differenziert nach dem zu vergebenden Abschluss:

– Variante 1 für den HSA-10: Hauptschule/Typ A und Gesamtschule/Grundkurs

– Variante 2 für den MSA: Hauptschule/Typ B, Gesamtschule/Erweiterungskurs, Realschule und Gymnasium

Die beiden Varianten bestehen aus vollständig disjunkten Aufgaben.

Der **2. Prüfungsteil** (Komplexere Aufgaben; siehe 2.1.2) differenziert nach dem zu vergebenden Abschluss und durch zusätzliche Änderungen für das Gymnasium:

- Variante 1 für HSA-10: Hauptschule/Typ A und Gesamtschule/Grundkurs
- Variante 2 für MSA: Hauptschule/Typ B, Gesamtschule/Erweiterungskurs und Realschule
- Variante 3 für MSA(Gy): Gymnasium

Die Variante 1 hat keine gemeinsamen Aufgaben mit den anderen Varianten. Die Variante für das Gymnasium unterscheidet sich im Durchgang 2008 von der Variante 2 dadurch: Der Aufgabe 2 sind für das Gymnasium zwei Teilaufgaben hinzugefügt. Bei Aufgabe 3 sind zwei Teilaufgaben der Realschul-Variante herausgenommen und dafür eine neue Teilaufgabe in die Gymnasium-Variante eingefügt. Aufgabe 4 hat in der Variante 2 vier zusätzliche Teilaufgaben gegenüber Variante 3. Die jeweiligen außermathematischen Kontexte der Aufgaben sind in beiden MSA-Varianten jedoch identisch. (Vgl. die Dokumentation im Anhang mit den kompletten Prüfungsaufgaben.)

Es werden daher im Folgenden stets diese drei Varianten der zentralen Prüfungen ZP-10 in Nordrhein-Westfalen betrachtet:

- **Variante 1 (HSA):**
  für Hauptschule/Typ A und Gesamtschule/Grundkurs
  (Die Aufgabentexte im Anhang sind mit der Überschrift „Hauptschule“ versehen.)

- **Variante 2 (MSA):**
  für Hauptschule/Typ B, Gesamtschule/Erweiterungskurs und Realschule
  (Die Aufgabentexte im Anhang sind mit der Überschrift „Realschule“ versehen.)

- **Variante 3 (MSA-Gy):**
  für Gymnasium
  (Die Aufgabentexte im Anhang sind mit der Überschrift „Gymnasium“ versehen.)

Das ministeriums-interne Papier von Büchter und Pallack (2009, S.10) gibt dieses „Differenzierungskonzept“ der zentralen Prüfungen übersichtsartig so wieder, wie in den drei linken Spaten der Tabelle 1. Die rechte Spalte enthält die in unserer Expertise verwendete Notation für die drei Varianten.

Tabelle 1 – 1. Differenzierungen in den zentralen Prüfungen nach Schulformen und angestrebtem Schulabschluss:

Abschluss	Prüfungsteil 1	Prüfungsteil 2	Kurzbezeichnung in diesem Bericht
HSA-10	Hauptschule 10 A, Gesamtschule Grundkurs	Hauptschule 10 A, Gesamtschule Grundkurs	HSA
MSA	Hauptschule 10 B, Gesamtschule Erweiterungskurs , Realschule, Gymnasium	Hauptschule 10 B, Gesamtschule Erweiterungskurs, Realschule	MSA
		Gymnasium	MSA-Gy

Alle Prüfungsaufgaben sind nach Abschluss der Prüfung öffentlich zugänglich. Im Internet sind sie unter der Adresse:

http://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/zp10/pruefungsaufgaben/

einzusehen (download geprüft am 15.10.2009). Die Aufgaben haben auch bereits Eingang in didaktisch-methodische Handbücher für Lehrerinnen und Lehrer gefunden, beispielsweise sind sie zusammen mit Lösungsvorschlägen abgedruckt in den bekannten Trainingsheften für die Prüfungen aus dem Stark-Verlag (2009 a, b, c, d). Die Aufgaben sind auch in den Anhang zu diesem Bericht eingebunden. Sie können jederzeit öffentlich diskutiert werden. Die drei Prüfungsvarianten enthalten die folgenden Anzahlen von Aufgaben, wobei wir zu Zwecken der Analyse jede Teilaufgabe als eine Aufgabe zählen:

Tabelle 1 – 2. Anzahlen von (Teil-)Aufgaben in den Prüfungsteilen der drei Prüfungsvarianten der ZP-10-2008 in Nordrhein-Westfalen:

	Prüfungsteil 1 Aufgabe 1	Prüfungsteil 2 Aufgaben 2, 3 und 4	gesamt
HSA	7	19	26
MSA	10	18	28
MSA-Gy		14	24

1.2.2 Unterrichtliche „Vorgaben“ zu den zentralen Prüfungen durch das Ministerium für Schule und Weiterbildung

Zur Vorbereitung auf die zentralen Prüfungen gibt das Ministerium für Schule und Weiterbildung jährlich „Unterrichtliche Voraussetzungen für die schriftlichen Prüfungen“ – kurz „Vorgaben“ genannt – heraus, differenziert nach den sechs o.g. Schulformen, in denen die zentralen Prüfungen stattfinden. Diese Vorgaben werden ergänzt durch einen je auf die Variante der zentralen Prüfung zugeschnittenen Satz von Beispiel- oder Übungsaufgaben, „Beispielarbeit“ genannt. Die Vorgaben, nicht aber die Beispielarbeiten, sind in der Dokumentation am Ende unserer Analysen abgedruckt.

Die Vorgaben enthalten – neben den notwendigen organisatorischen Regelungen etwa zum Gebrauch von Formelsammlungen und elektronischen Rechenhilfsmitteln[3] – vor allem die Beschreibung des Aufbaus der Prüfung und Angaben zu den unterrichtlichen Schwerpunkten, die für die Vorbereitung auf die schriftliche Prüfung im jeweiligen Jahr eingehalten werden sollen. Aus diesen Schwerpunkten werden dann die Aufgaben der zentralen Prüfungen genommen.

Die „Vorgaben“ und die Beispielaufgaben werden ca. zwei Jahre im Voraus bekannt gemacht, im Fall der zentralen Prüfungen des Jahres 2008 also im November 2006. Den Lehrerinnen und Lehrern wird empfohlen, die Schülerinnen und Schüler auf die zentralen Prüfungen vorzubereiten, etwa indem sie in der Klasse 10 eine reguläre Klassenarbeit mit Aufgabenformaten analog zu denen der zentralen Prüfungen stellen. Die „Beispielarbeit“ kann dabei zur Orientierung dienen.

In allen Varianten sind die zentralen Prüfungen jeweils in 2 Teile gegliedert. Im ersten Teil – „Aufgabe 1“ genannt mit mehreren, allerdings untereinander nicht weiter verbundenen Teilaufgaben – werden sog. *Basiskompetenzen* geprüft. Darunter werden solche Kompetenzen verstanden, „die für einen angemessenen Umgang mit Zahlen und Größen im

[3] I.a. sind die üblichen Formelsammlungen der Schulbuchverlage zugelassen. Inwieweit diese über die allgemeine Zulassung hinaus auf Adäquatheit für die Verwendung in den zentralen Prüfungen geprüft werden, ist uns nicht bekannt. Zu Übungszwecken wird eine Formelsammlung auch im Internet angeboten. An elektronischen Rechenhilfsmitteln sind alle in der Schule üblichen Taschenrechner zulässig. Näheres dazu wird ebenfalls im Internet erläutert.

Alltag sowie für das vertiefte Anwenden und Betreiben von Mathematik eine besondere Rolle spielen", wie es in den Vorgaben zu den zentralen Prüfungen heißt.

Der zweite Teil enthält *komplexere Aufgaben*. I.a. werden hier Aufgaben gestellt, die aus jeweils mehreren miteinander verbundenen Teilaufgaben bestehen. Alle vier Prozessbereiche des Kerncurriculums (Argumentieren und Kommunizieren; Problemlösen; Modellieren; Werkzeuge) und alle vier Inhaltsbereiche (Arithmetik und Algebra; Funktionen; Geometrie; Stochastik) sollen in diesem zweiten Teil der zentralen Prüfungen vorkommen. Die Aufgaben im zweiten Teil können auch Kompetenzen erfordern, die die Schülerinnen und Schüler bereits in weiter zurückliegenden Schuljahren erworben haben.

Die „Vorgaben" enthalten nun relativ detaillierte Hinweise zu beiden Prüfungsteilen. Zum *ersten Teil – Basiskompetenzen* – wählen sie spezielle Bereiche aus und konkretisieren die Anforderungen noch durch Hinweise auf Aufgaben aus den Lernstanderhebungen (LSE) bzw. der Beispielarbeit. So ist etwa in der Vorgabe zur zentralen Prüfung auf diesen Bereich hingewiesen:

> Schätzen und Runden (siehe z. B. Aufgabe Schnur LSE 2005, Aufgabe Schulbus LSE 2004, Beispielarbeit Prüfungen 10: Aufgabe 1a) und 1d)).

Die Hinweise zum ersten Teil der zentralen Prüfung sind, soweit nicht curriculare Verschiedenheiten dem entgegenstehen (etwa: „Umgang mit Variablen, Termen und Gleichungen" wird nur für das Gymnasium erwähnt), weitestgehend identisch von der Hauptschule bis zum Gymnasium. Es wird zu untersuchen sein, wie eng sich die tatsächlich gestellten Aufgaben in der zentralen Prüfung an diese Hinweise anlehnen bzw. an welchen Stellen sie aktiv oder passiv abweichen.

Hinsichtlich der Angabe von inhaltlichen Schwerpunkten für den *zweiten Prüfungsteil* der zentralen Prüfungen halten sich die „Vorgaben" an die Struktur der Kernlehrpläne in Nordrhein-Westfalen. Diese sind als sog. Kompetenz-Matrix nach zwei Dimensionen aufgebaut: Sie unterscheiden für das jeweilige Fach – angelehnt an die Struktur der Bildungsstandards – zwischen inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzen. Im Fach Mathematik werden in den Kernlehrplänen (vgl. auch MSW, 2007) aufgezählt

an *inhaltsbezogenen* Kompetenzen:

– Arithmetik / Algebra
– Funktionen
– Geometrie
– Stochastik

an *prozessbezogenen* Kompetenzen:

– Argumentieren / Kommunizieren
– Problemlösen
– Modellieren
– Nutzung von Werkzeugen

Stellt man diese beiden Dimensionen orthogonal gegenüber, so entsteht eine Matrix mit 16 Feldern. Die „Vorgaben" definieren nun einige dieser 16 Felder als relevant für die Prüfung des jeweiligen Jahres. Die ausgewählten Felder sind dabei relativ spezifiziert beschrieben, bis hin zu bestimmten Kontexten in denen bestimmte Kompetenzen abgefragt werden sollen.

Zwei Beispiele sollen dies vorab aufzeigen, wobei eine genauere Analyse die Entsprechungen von Vorgabe und tatsächlich gestellten Aufgaben prüfen wird (vgl. Kap. 3.2.1).

Im Feld Problemlösen × Geometrie findet man in den „Vorgaben 2008“ diese Einträge:

Hauptschule Typ A, Gesamtschule – Grundkurs	Gesamtschule – EK, Realschule, Gymnasium
Bestimmung unbekannter Größen durch Zerlegen von Figuren oder mit Hilfe des Satzes von Pythagoras	Bestimmung unbekannter Größen durch Zerlegen von Figuren, mit Hilfe des Satzes von Pythagoras oder mit Hilfe von Ähnlichkeitsbeziehungen.

Man erkennt, dass sich das Ministerium bemüht, die Vorgaben möglichst einheitlich für die unterschiedlichen Schulformen und Prüfungsvarianten zu halten. Das setzt sich analog zum gegebenen Beispiel auch in den anderen Feldern der Kernlehrpläne fort.

Im Feld Modellieren × Funktionen notieren die „Vorgaben 2008“:

Hauptschule Typ A, Gesamtschule – Grundkurs	Gesamtschule – EK, Realschule, Gymnasium
Erstellung, Nutzung und Interpretation von Modellen aus den Bereichen: Tarife (lineare Tarife und Stufentarife), Prozent- und Zinsrechnung (z. B. Preisreduktion, Spar und Kreditmodelle), Weg-Zeit-Zusammenhänge	Erstellung, Nutzung und Interpretation von Modellen aus den Bereichen: Tarife, Weg-Zeit-Zusammenhänge, Wachstumsprozesse (linear oder exponentiell), Prozent-, Zins- und Zinseszinsrechnung (z. B. Preisreduktion, Spar- und Kreditmodelle)

Auch für den zweiten Teil der zentralen Prüfungen werden also die Hinweise möglichst homogen über die Schulformen und Prüfungsvarianten gehalten.

Die Variation der Vorgaben über die Folgejahre der ZP-10 ist nur sehr gering. I.w. sind die gleichen Felder besetzt; viele Hinweise bleiben konstant – etwa wird auch in 2010 „Prozent-, Zins- und Zinseszinsrechnung (z. B. Preisreduktion, Spar- und Kreditmodelle“ identisch wiederholt – oder es werden lediglich die zu verwendenden Hilfsmitteln ausgetauscht – in 2010 etwa statt des Satzes des Pythagoras als Hilfsmittel nun „mithilfe von Sinus, Kosinus und Tangens“.

1.2.3 Auswertungsanleitungen des Ministeriums

Schließlich gibt das Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen den korrigierenden Lehrerinnen und Lehrer auch sog. Auswertungsanleitungen zur Hand. Diese sind ebenfalls – wie die Aufgaben und die Vorgaben –der Dokumentation zu diesem Bericht beigefügt. Diese Anleitungen sollen, nach Büchter & Pallack (2009), „die Punktvergabe zumindest innerhalb der Aufgabenkommission intersubjektiv nachvollziehbar“ machen. Aufgebaut sind die Auswertungsanleitungen daher in Form von sog. „Kriterien“:

Zu jeder Aufgabe wird ein idealtypischer Lösungsgang dargestellt, dieser in Schritte gegliedert und dann auf jeden Schritt eine gewissen Anzahl von Punkten vergeben. Die Punktvergabe soll (Büchter & Pallack, 2009) mit Blick auf die Kompetenzerwartungen in den Kernlehrplänen vollzogen werden. Dementsprechenden sind die Kriterien gefasst. Die beispielhaft diskutierte Lösung soll allerdings keine Musterlösung sein, sondern den Lehrerinnen und Lehrern wird die Möglichkeit gegeben, alternative Lösungswege vergleichbar zu bewerten. Dann müssen sie sich nicht mehr an die vorgegebenen Kriterien halten, aber dennoch an den Kompetenzerwartungen der Kernlehrpläne orientieren.

Die korrigierenden Lehrerinnen und Lehrer haben darüber hinaus auch ein Gesamturteil abzugeben über die sog. „Darstellungsleistungen“ der Schülerinnen und Schüler und über den Gebrauch von Maßeinheiten während der gesamten Bearbeitung der Aufgaben der ZP-10. Die hier für zu vergebenden Punkte spielen dem Betrag nach durchaus eine nicht zu vernachlässigende Größe bei der Endbewertung.

Tabelle 1 – 3. Laut Auswertungsanweisungen zu vergebende Punktezahlen in den drei Prüfungsvarianten der ZP-10-2008 in Nordrhein-Westfalen:

	Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Umgang mit Maßeinheiten	Darstellungsleistung	Gesamtpunktzahl
HSA	21	10	17	17	2	4	71
MSA	19	15	14	18	3	6	75
MSA-Gy	19	19	17	11	3	6	75

1.3 Für diesen Bericht zur Verfügung stehende Daten

Die folgenden Analysen der zentralen Prüfungen in Mathematik in Nordrhein-Westfalen sind einzuordnen in den vom Ministerium für Schule und Weiterbildung definierten Rahmen des sog. Moduls 2. Hierin sollen speziell für den Durchgang 2008 die fachlichen Leistungen in den Fächern Deutsch, Englisch und Mathematik differenzierter erfasst werden, und zwar auf der Basis der Daten aus einer Zufallsstichprobe von ursprünglich geplanten insgesamt 160 Schulen. Diese Stichprobe soll die Verhältnisse bei der ZP-10 im Land Nordrhein-Westfalen repräsentativ erfassen. Zwei Typen von Daten liegen uns für diesen Bericht vor, der Datensatz „Modul 2“ und ein Satz ausgewählter kompletter Schülerbearbeitungen.

1.3.1 Datensatz „Modul2“

Der *Datensatz* „Modul 2“, der uns aus dem Ministerium zur Verfügung gestellt wurde, enthält Informationen über insgesamt 3490 Schülerinnen und Schüler, die sich wie folgt auf die Schulformen und Typen verteilen:

Tabelle 1 – 4. Anzahlen von Schulen sowie Schülerinnen und Schülern im Datensatz „Modul 2“

	Hauptschule Typ A	Hauptschule Typ B	Gesamtschule Grundkurs	Gesamtschule Erw.-Kurs	Realschule	Gymnasium	gesamt
Schulen	8	20	27	25	30	38	148
Schülerinnen und Schüler	195	421	509	589	788	988	3490
Geschlecht (m / w)	114 / 81	204 / 217	232 / 277	312 / 277	369 / 419	475 / 513	1706 / 1784
Anteil Schülerinnen (in %)	41,5 %	51,5 %	54,4 %	47,0 %	53,2 %	51,9 %	51,1 %
Mittlere Klassenstärke (St.-Abw.)	24,4 (3,7)	21,1 (3,5)	18,9 (4,8)	23,6 (4,2)	26,3 (2,9)	26,0 (3,6)	

Von diesen Schülerinnen und Schülern können wir die Bewertungen, die die Lehrerinnen und Lehrer in der ZP-10 vergeben haben, aufgabengenau auswerten. Es kann daher über diese Bewertungen (in Kap. 2.3) und über die von den Lehrerinnen und Lehrern konstatierten Schwierigkeiten der einzelnen Aufgaben (in Kap. 2.4 und detaillierter in Kap. 8) berichtet werden.

Hinweise zum Datensatz „Modul 2“:

1 Die Auswertungsanleitungen des Ministeriums für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen geben auch die Spannen der Punktzahlen an, nach denen Lehrerinnen und Lehrer die Noten zu vergeben haben. Der Datensatz „Modul 2“ (siehe folgenden Abschnitt) enthält allerdings keine original eingetragenen Noten. Wir haben für den deskriptiven Teil dieses Berichts die Noten der Schülerinnen und Schüler aus den Punktzahlen rekonstruiert. Im analytischen Teil mit den Besprechungen der ausgewählten

Schülerbearbeitungen konnten hingegen die Endnoten aus den Kopien der Originalarbeiten übernommen werden.

2 In dem vom Ministerium übermittelten Datensatz „Modul 2“ werden bei Aufgabe MSA-1f1 bzw. MSA-Gy-1f1 („Auftreten von „4“ beim Werfen eines Quaders“) nur max. 2 Punkte verzeichnet gegenüber 3 Punkten in den Auswertungsanleitungen. Der Versuch, diese Unstimmigkeit durch Summenbildung über die einschlägigen Kriterien zu beseitigen, schlug fehl, denn auch diese beiden Kriterien enthalten ihrerseits inhaltliche Inkonsistenzen. Wir übernehmen daher bei dieser Aufgabe die – insgesamt plausiblen – Punktbewertungen im Originaldatensatz. Bei einigen Tabellen gehen wir somit in der MSA-Prüfung und der MSA-Gy-Prüfung von max. 18 Punkten in Aufgabengruppe 1 bzw. von max. 74 Punkten in der Gesamtprüfung aus. Die Notengebung ist davon allenfalls marginal in einer abgeschätzten Größenordnung von unter 2 % beeinflusst.

3 Für die beiden Teilaufgaben MSA-1e1 und MSA-1e2 (identisch mit MSA-Gy-1e1 und MSA-Gy-1e2: „Blitz und Donner“) berichtet der Datensatz „Modul 2“ exakt identische Punktvergaben. Es ist aber auch ein Summenscore für die gesamte Aufgabe MSA-1e bzw. MSA-Gy-1e angegeben, der zeigt, dass (a) die Schülerinnen und Schüler sich nicht exakt gleich bei beiden Teilaufgaben verhalten haben, dass (b) die zweite Teilaufgabe sehr ähnlich der ersten gelöst sein musste. Hier wird daher der vom Ministerium übermittelte Punktesatz als beste Schätzung beibehalten.

4 Der uns übermittelte Datensatz enthält darüber hinaus noch einige weitere interne Unstimmigkeiten bei den Punktevergaben, beispielsweise dass einige Bewertungen von Kriterien nicht korrekt zur Punktzahl bei der Gesamtaufgabe aufsummiert wurden. Soweit dies zweifelfrei möglich war, haben wir diese Unstimmigkeiten beseitigt. In den anderen Fällen – in der Größenordnung bei unter 1 % der Schülerinnen und Schüler – wurden mangels besserer Information die entsprechenden Werte als „fehlend“ deklariert.

1.3.2 Konkrete Schülerbearbeitungen aus einer Stichprobe

Zusätzlich sind uns – vollständig unabhängig von dem o.g. Datensatz – aus den zentralen Prüfungen des Ministeriums für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen im Jahr 2008 konkrete *Schülerbearbeitungen*[4] *aus Gymnasien und Erweiterungskursen an Gesamtschulen* in Kopien zur Verfügung gestellt worden. Diese von den Schulen ausgewählten und über das Ministerium an uns gelangten Schülerlösungen sind die Grundlage der detaillierten Analysen der Aufgabenbearbeitungen in der ZP-10 in Kap. 8. Die Anzahlen sind in der Tabelle angegeben.

Es liegen dabei jeweils die vollständigen Schülerlösungen vor, i.a. zusammen mit den Beurteilungen durch die Lehrerinnen und Lehrer. Bei 3 Schülerbearbeitungen fehlen die Bewertungsprotokolle der Lehrerinnen und Lehrer. Bei diesen drei Exemplaren sind daher zwar die von uns kodierten Merkmale der Aufgabenbearbeitung ersichtlich, ebenso die Gesamtnote, aber i.a. nicht die genauen Punktzahlen, die die Korrektoren zu einzelnen Aufgaben und den Kriterien hierfür vergeben haben.

[4] Selbstverständlich anonymisiert.

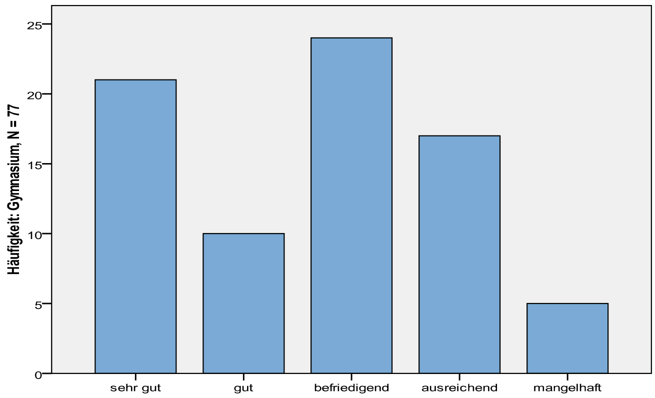
Tabelle 1 – 5. Schülerinnen und Schüler sowie Schulen, von denen die Bearbeitungen der ZP-10-Aufgaben für die Analyse vorliegen:

vorliegende Bearbeitungen der ZP-10		Gesamtschule Erweiterungskurs	Gymnasium
Schulen	Anzahl	10	26
Schülerinnen und Schüler	Anzahl	30 (je 3 pro Schule)	77 (je 3 bei 25 Schulen, 1 Schule mit 2[5])

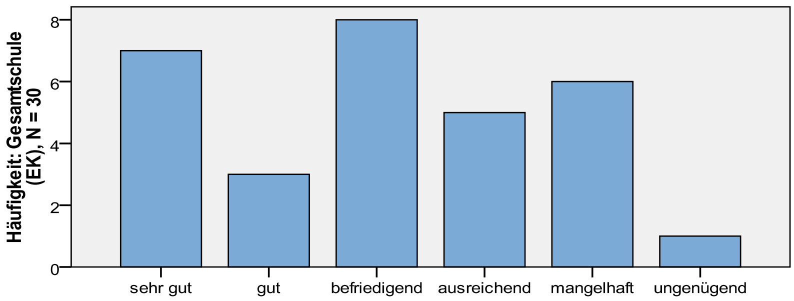
Von jeder Schule ist dabei jeweils eine Arbeit aus dem leistungsstarken, dem mittleren und dem leistungsschwachen Bereich eingereicht worden. Die vergebenen Endnoten zeigen die folgenden Abbildungen.

Abbildung 1 – 6. Notenverteilung der Schülerinnen und Schülern, deren Aufgabenbearbeitungen in die Detailanalysen eingehen:

Gymnasium



Gesamtschule/Erweiterungskurs



Die Stichprobe der für die Analysen der Schülerbearbeitungen ausgewählten Lösungen ist also verzerrt. Dies verbietet es, aus den untersuchten Schülerbearbeitungen absolute Schlüsse für die gesamte Schülerschaft der beiden Schulformen zu ziehen. Das Ziel der Analysen in diesem Bericht ist vielmehr, aus den vorliegenden Schülerlösungen Anregungen für Aufgabenkonstruktion und für die Entwicklung des Mathematikunterrichts zu gewinnen.

[5] Eine Schule schickte als drittes Exemplar eine Schülerbearbeitung der Wiederholungsklausur, die andere Aufgaben enthält. Diese Schülerbearbeitungen werden nicht interpretiert.

2. Notengebung, Aufgabenbewertungen und Kompetenzprofile in den Schulformen in der Stichprobe „Modul 2“

Die hier und im nächsten Abschnitt folgenden Darstellungen sollen den Rahmen abstecken für die analytischen Betrachtungen, die in diesem Bericht anschließend nach zwei großen Linien durchgeführt werden: „Aufgaben-Stellung“ - das mathematische und mathematikdidaktische Potential, das in den Aufgaben realisiert ist; „Aufgaben-Bearbeitung“ – das bei den Schülerinnen und Schülern konkret zu beobachtende Lösungsverhalten. Es werden die Daten aus dem Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen zum sog. Modul 2 (siehe Kap. 1.3) benutzt. Dies ist eine Stichprobe, die das Gesamtergebnis der ZP-10 im Land Nordrhein-Westfalen repräsentativ widerspiegelt.

Zwei Gesichtspunkte leiten die folgenden zunächst deskriptiven Darstellungen. Zum einen soll man einen Eindruck gewinnen von der realen Schwierigkeit jeder einzelnen Aufgabe (im Licht der Bewertungen durch die korrigierenden Lehrerinnen und Lehrer). Dem dient die Übersicht über die Prozentsätze vollständig gelöster Aufgaben im nachfolgenden Kap. 2.4.

Zum anderen handelt es sich bei der ZP-10 um eine Prüfung mit doppelter Funktion: Sie beeinflusst mit ca. 50 % die Abschlussnoten der Schülerinnen und Schüler (vgl. Büchter & Pallack, 2009). Insofern ist die ZP-10 eine Prüfung mit „high-stakes“-Charakter. Die Endnote wiederum dient den Schülerinnen und Schülern als Grundlage für Bewerbungen in das Berufsleben hinein bzw. als Kriterium für den möglichen Übergang aus der Sekundarstufe I in die gymnasiale Oberstufe. Daher ist es unter der Perspektive der Bewertungsgerechtigkeit vor allem interessant, ob die Schülerinnen und Schüler aus allen Schulformen, die an ein und derselben zentralen Prüfung teilnehmen, die gleichen Chancen bei den Noten haben. Im Nachhinein geben die deskriptiven Darstellungen daher auch Anlass zu Schlussfolgerungen für die zukünftige Gestaltung der zentralen Prüfungen.

Als Basis der Vergleiche in den Kap. 2.1, 2.2 und 2.3 werden – über die entsprechenden Gruppierungen hinweg – jeweils die arithmetischen Mittelwerte der erreichten Punktwerte bzw. der Noten genommen. Dieses Maß entspricht am ehesten der vorherrschenden Art der Bewertung von Schülerbearbeitungen durch die Lehrerinnen und Lehrer, wie sie auch von Büchter & Pallack (2009) in den Grundzügen beschrieben werden: Lehrkräfte honorieren traditionellerweise auch Teillösungen und unvollständige Ansätze. Sie richten sich mit unterschiedlicher Gewichtung nach Teilaufgaben und ihren eigenen Kriterien. Es erfolge, so Büchter & Pallack, die Punktvergabe weniger nach etablierten didaktischen Konzepten, sondern in der Praxis oft „aus dem Bauch heraus“. Beide Autoren begründen damit das Vorgehen des Ministeriums, die Punktvergabe nach Kriterien entlang zweier Dimensionen, Zeitbedarf und kognitive Anforderung, möglichst nachvollziehbar zu gestalten. Die Bildung arithmetischer Mittelwerte reflektiert diese Gegebenheiten. Es wird dabei von der jeweiligen Fragestellung abhängen, wann Noten, wann Punktzahlen heranzuziehen sind.

2.1 Ergebnisse in der Prüfungsvariante HSA: Hauptschule/Typ A und Gesamtschule/Grundkurs

2.1.1 Vergebene Noten in der HSA-Prüfung

Die Prüfungsvariante HSA wird den Schülerinnen und Schülern aus der Hauptschule Typ A und den Schülerinnen und Schülern der Grundkurse der Gesamtschulen gestellt. Da die in der ZP-10 vergebenen Noten zur Hälfte die Note des Faches Mathematik im Abschlusszeugnis bestimmen, hat die ZP-10 eine deutliche Auswirkung darauf, wie sich diese Schülerinnen und Schüler auf dem Arbeitsmarkt präsentieren können. Sind die Noten der ZP-10 systematisch unterschiedlich nach diesen beiden Schulformen?

Die Auswertung zeigt, dass in beiden Schulformen alle Notenstufen von 1 bis 6 vergeben werden und dass die Abschlussprüfung mit einer Durchschnittsnote von 2,64[6] sicher insgesamt nicht zu schwer ist. Die Chancen der Jugendlichen bei Bewerbungen werden somit durch die Mathematiknote nicht systematisch beeinträchtigt.

Tabelle 2 – 1. Notenvergabe in der HSA-Prüfung:

	Anzahl der Schülerinnen und Schüler	Mittelwert Endnote	Standard-abweichung	Standard-fehler
Hauptschule Typ A	195	**2,56**	1,193	,085
Gesamtschule - Grundkurs	509	**2,68**	1,163	,052
gesamt	704	**2,64**	1,172	,044

Die Durchschnittsnoten in den beiden Schularten unterscheiden sich nicht signifikant[7] Die Abschlussprüfung „reagiert“ somit auf die Kompetenzen, die die Jugendlichen in Mathematik erworben haben, in beiden Schulformen gleichmäßig. Deshalb ist eine gemeinsame Abschlussprüfung für beide Schulformen in der Art der ZP-10 von 2008 zu vertreten. Sie benachteiligt weder die Schülerinnen und Schüler der Hauptschule noch die der Gesamtschulen und gibt aus beiden Schulformen heraus die gleichen Chancen auf dem Arbeitsmarkt. Die inhaltliche Adäquatheit der HSA-Prüfung, z.B. bezüglich der Kernlehrpläne und anderer inhaltlicher Gesichtspunkte, wird in Kap. 3 und 4 geprüft.

2.1.2 Leistungsstarke und leistungsschwache Klassen

Dennoch gibt es zwischen den Klassen beträchtliche und hochsignifikante[8] Unterschiede. Die Gründe dafür können hier allerdings nicht diskutiert werden. Es fehlen im Datensatz „Modul 2“ sowohl die sozioökonomischen Daten der Schüler, die sich bekanntlich (vgl. die PISA-Daten; Baumert & al., 2001; und viele andere bekannte Belege) durchaus auf die Leistungen der Schüler auswirken, als auch Variablen, die etwas über den Unterricht in der Klasse oder die Prüfungsbedingungen der Abschlussprüfungen vor Ort aussagen könnten. Zur Illustration zeigen wir aber die Ergebnisse der in jeder der beiden Schulformen jeweils (an den Noten gemessen) leistungsstärksten bzw. leistungsschwächsten Klasse. Die Unterschiede reichen so weit, dass in den entsprechenden Klassen sogar das Notenspektrum nicht voll ausgenutzt wird.

[6] Das arithmetische Mittel ist hier und im Folgenden nicht nach weiteren Parametern (beispielsweise Klassengröße als ein Indikator für Klumpungen der Stichprobe) gewichtet. Die Daten stammen aus dem Datensatz „Modul 2“.

[7] ONEWAY ANOVA: $df = 1$; $F = 1{,}403$; *ns*.

[8] ONEWAY ANOVA: $df = 34$; $F = 6{,}594$; $p<0{,}001$.

Tabelle 2 – 2. Notenvergabe in den jeweils leistungsstärksten bzw. leistungsschwächsten Klassen der HSA-Prüfung:

		Klassen-stärke	Mittelwert Endnote	Standard-abweichung	Standard-fehler	beste Note	schlechteste Note
Hauptschule Typ A	stärkste Klasse	24	1,79	,658	,134	1	3
	schwächste Klasse	21	3,86	1,315	,287	1	6
Gesamtschule - Grundkurs	stärkste Klasse	21	2,00	1,000	,218	1	5
	schwächste Klasse	18	4,33	,767	,181	3	5

2.1.3 Unterschiede zwischen Mädchen und Jungen

Obwohl sich die beiden Schulformen in der HSA-Prüfung also insgesamt recht gleichmäßig darstellen, treten doch die Differenzen zwischen Mädchen und Jungen bereits auf der Gesamtebene auf. Der Unterschied ist signifikant[9]. Der Vorteil fällt zugunsten der Jungen aus.

Tabelle 2 – 3. Notenvergabe in der HSA-Prüfung, Unterschiede zwischen Mädchen und Jungen:

	Anzahl der Schülerinnen und Schüler	Mittelwert Endnote	Standard-abweichung	Standard-fehler
Mädchen	358	2,88	1,158	,061
Jungen	346	2,40	1,135	,061
gesamt	704	2,64	1,172	,044

Die Unterschiede zwischen Mädchen und Jungen machen sich allerdings in den beiden Schulformen jeweils anders bemerkbar. Berechnet man die Jungen-Mädchen-Unterschiede innerhalb der beiden Schulformen, so stellt sich Signifikanz deutlich in der Gesamtschule ein, aber nicht (jedenfalls nicht mehr auf dem 5%-Niveau) in der Hauptschule. Diesen Unterschieden kann hier aber nicht weiter nachgegangen werden. Zur Illustration werden diejenigen Aufgaben erwähnt, bei denen es in der HSA-Prüfung *keinen* signifikanten Unterschied zwischen männlichen und weiblichen Jugendlichen gibt. Es sind dies die folgenden Aufgaben:

Tabelle 2 – 4. Aufgaben OHNE signifikanten Unterschied (5 %-Niveau) zwischen Mädchen und Jungen in der HSA-Prüfung:

Aufgabe	Kurzbezeichnung	max. Punkt-zahl	Mittelwert Mädchen	Mittelwert Jungen	
HSA-1c	Umfang Quadrat	2	1,81	1,83	df = 1; F = ,205; *ns*
HSA-1e	Volumen Quader	3	2,79	2,82	df = 1; F = ,276; *ns*
HSA-1f_1	Klassenarbeit, Note 2	2	1,95	1,94	df = 1; F = ,199; *ns*
HSA-1f_2	Klassenarbeit, Teilnahme	3	2,71	2,75	df = 1; F = ,340; *ns*
HSA-2a	Beitragssatz 1980	1	,97	,96	df = 1; F = ,837; *ns*
HSA-2d2	Zusatzversicherung numerisch	2	,77	,85	df = 1; F = 2,004; *ns*
HSA-4a	Schaubild Eintrittspreise	1	,62	,67	df = 1; F = 2,171; *ns*
HSA-4b_1	Lohnt sich Tageskarte	2	1,47	1,58	df = 1; F = 3,172; *ns*
HSA-4b_2	Mit Tageskarte bleiben	2	,72	,63	df = 1; F = 2,468; *ns*

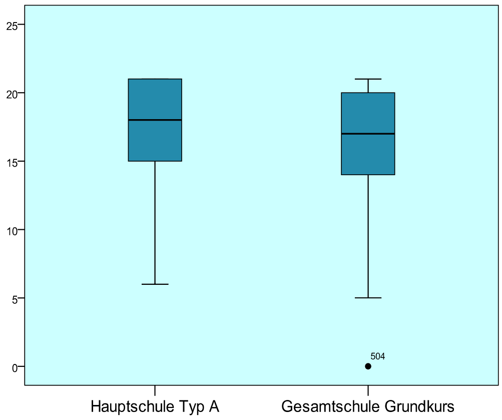
[9] ONEWAY ANOVA: $df = 1$; $F = 31{,}674$; $p<0{,}001$.

2.1.4 Bewertung der Aufgabengruppe 1 („Basiskompetenzen“)

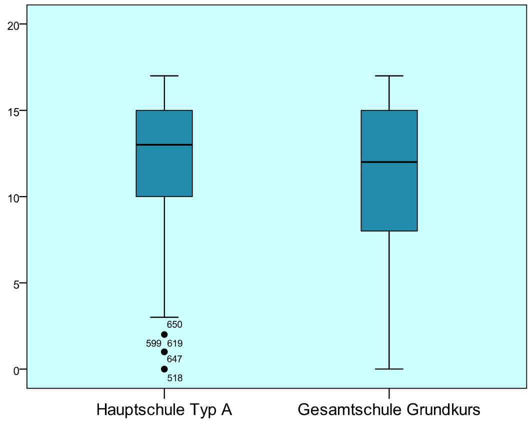
Signifikante Unterschiede zwischen den Schulformen könnten sich prinzipiell auch in der Bearbeitung einzelner Aufgaben in der HSA-Prüfung der ZP-10 ergeben[10]. Das ist allerdings nicht der Fall. In allen vier Aufgabengruppen verhalten sich die Schülerinnen und Schüler aus den Hauptschulen Typ A und den Grundkursen der Gesamtschulen i.w. gleich. An ehesten ist tendenziell[11] noch ein Unterschied zugunsten von Hauptschule Typ A bei der Aufgabe 4 auszumachen. Exemplarisch sollen daher die beiden Aufgabengruppen „Aufgabe 1“ (die „basics“) und „Aufgabe 4“ (mit dem größten, wenngleich nicht signifikanten Unterschied in den Schulformen) betrachtet werden. In ähnlicher Weise stellen sich auch die Punktezahlen (anstelle der Noten) für die gesamte HSA-Prüfung dar. Es gibt keinen signifikanten Unterschied zwischen den beiden Schulformen.

Tabelle 2 – 5. Punktbewertung in der HSA-Prüfung, Aufgaben 1 und 4:

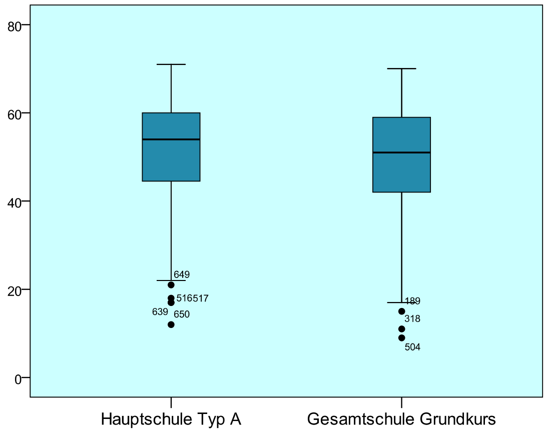
Aufgabe 1, max. Punktzahl: 21



Aufgabe 4, max. Punktzahl: 17



Punkteverteilung in der HSA-Prüfung (max. Punktzahl: 71):



[10] Die Bewertungen sind dann per vergebener Punktezahl darzustellen.

[11] Signifikanzniveau $p = 0{,}0762$.

2.2 Ergebnisse der Prüfungsvariante MSA: Hauptschule/Typ B, Realschule und Gesamtschule/Erweiterungskurs

2.2.1 *Noten in der MSA-Prüfung: Aspekte der Bewertungsgerechtigkeit*

Das für die HSA-Prüfung genannte Argument, dass sich ungleiche Notenvergaben in den Schulformen nachteilig für die Schülerinnen und Schüler bei Bewerbungen für das Berufsleben erweisen könnten, hat nun erst recht und verschärft Bedeutung. Mit dem Mittleren Schulabschluss steht nämlich eine breite Palette von Berufsbildern zur Wahl. Die folgenden Tabellen zeigen nun tatsächlich erhebliche Unterschiede zwischen den Schulformen, die zudem nach mehreren Vergleichsgesichtspunkten deutlich und stets zu Lasten der Schülerinnen und Schüler aus dem Hauptschultyp B ausfallen werden.

Tabelle 2 – 6. Notenvergabe[12] in der MSA-Prüfung nach Schulformen:

	Anzahl der Schülerinnen und Schüler	Mittelwert Endnote	Standard-abweichung	Standard-fehler
Hauptschule – Typ B	421	**3,50**	,982	,048
Realschule	788	**2,86**	1,027	,037
Gesamtschule – Erweiterungskurs	589	**2,78**	1,079	,044
gesamt	1798	**2,98**	1,073	,025

Tabelle 2 – 7. Mehrfachvergleiche (Bonferroni) zwischen Hauptschule Typ B, Gesamtschule/ Erweiterungskurs und Realschule in der MSA-Prüfung (Basis: Noten)

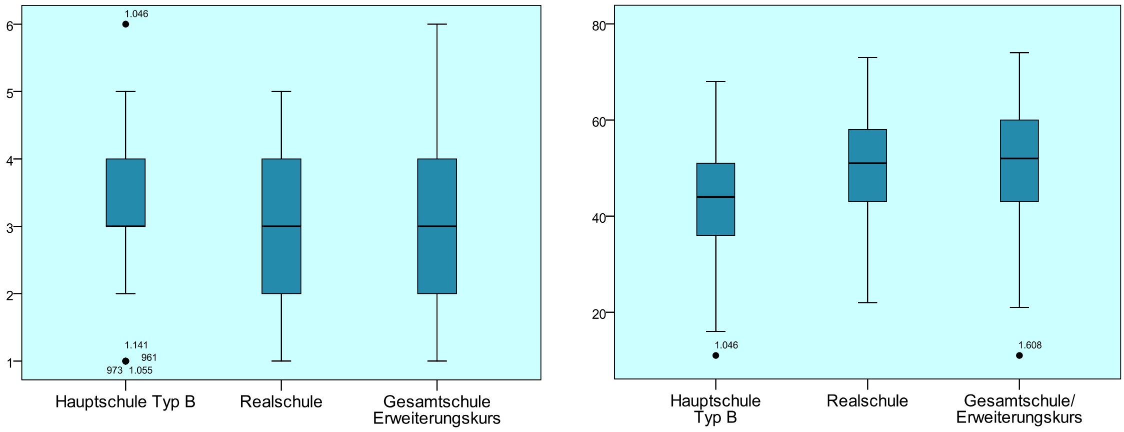
(a)	(b)	Mittlere Differenz (a) – (b)	Standardfehler	Signifikanz
Hauptschule - Typ B	Realschule	,641*	,062	,000
	Gesamtschule - EK	,723*	,066	,000
Realschule	Hauptschule - Typ B	-,641*	,062	,000
	Gesamtschule - EK	,082	,056	,437
Gesamtschule - Erweiterungskurs	Hauptschule - Typ B	-,723*	,066	,000
	Realschule	-,082	,056	,437

*. Die Differenz der Mittelwerte ist auf dem Niveau 0.05 signifikant.

Es zeigt sich zunächst, dass die MSA-Prüfung mit den Durchschnittsnoten 2,78 bzw. 2,86 für den Erweiterungskurs der Gesamtschule bzw. die Realschule nicht zu schwer ausfällt. In der Hauptschule Typ B wird aber mit 3,50 eine erheblich schlechtere Durchschnittsnote erzielt. Der Boxplot zeigt diese Verhältnisse anschaulich; noch differenzierter als bei den Noten lässt sich der Abstand der Hauptschule Typ B aus dem Bild mit der Punkteverteilung erkennen.

[12] Die Noten sind von uns nachträglich berechnet worden. Vgl. die Hinweise zum Datensatz „Modul 2" Nr. 1 und 2 in Kap. 1.3.1.

Tabelle 2 – 8. Notenverteilung und Punkteverteilung (max. Punktzahl: 74[13]) auf die Schulformen in der MSA-Prüfung:



Die Unterschiede zwischen den drei Schulformen sind hochsignifikant. Bei Mehrfachvergleichen zwischen den Schulformen nach Bonferroni erkennt man dabei bereits auf dieser allgemeinen Ebene ein Muster, das sich bis zum Verhalten bei den meisten einzelnen Aufgaben durchziehen wird: Die Abschlussnoten (und in gleicher Weise auch die Vergabe der Punkte) in Gesamtschule/Erweiterungskurs und Realschule unterscheiden sich nicht signifikant, aber sehr wohl die Noten des Hauptschultyps B von denen der beiden anderen Schulformen. Das Muster wird später beim Hinzufügen des Gymnasiums (für die gemeinsame Aufgabe 1) bestehen bleiben und das Gymnasium als zusätzliche Leistungsstufe ausweisen (siehe folgenden Abschnitt).

2.2.2 Persistente Unterschiede zwischen Hauptschule/Typ B und den anderen Schulformen

Das Muster „Hauptschule/Typ B“ auf der einen Seite und andererseits die nicht unterscheidbare Gruppe „Realschule & Gesamtschule/Erweiterungskurs“ bleibt fast immer auch auf der Aufgabenebene erhalten. Von mathematikdidaktischem Interesse ist dies vor allem bei der Aufgabengruppe 1, der Erfassung der sog. „Basiskompetenzen“. Die Mittelwertunterschiede zwischen Realschule und Gesamtschule/Erweiterungskurs sind nun statistisch überhaupt nicht mehr zu trennen, wie die Mehrfachvergleiche nach Bonferroni zeigen.

[13] Die Auswertungsanleitungen des Ministeriums weisen ursprünglich eine maximale Punktzahl von 75 aus. Der Datensatz des Ministeriums berichtet die Punktbewertung der Aufgabe MSA-1f1 mit nur 2 Punkten. Daher sind in dieser und einigen weiteren Tabellen 74 Punkte für die Gesamtprüfung und 18 (gegenüber 19) Punkte für die Aufgabengruppe 1 das erreichbare Maximum. Vgl. die Hinweise zum Datensatz „Modul 2“ in Kap. 1.3.1.

Tabelle 2 – 9. Punktmittelwerte[14] bei Aufgabengruppe 1 („Basiskompetenzen“) in der MSA-Prüfung nach Schulformen:

	Anzahl der Schülerinnen und Schüler	Mittelwert	Standard-abweichung	Standard-fehler
Hauptschule – Typ B	421	**11,70**	2,967	,145
Realschule	788	**13,01**	2,696	,096
Gesamtschule – Erweiterungskurs	589	**12,96**	3,143	,130
gesamt	1798	**12,69**	2,962	,070

Tabelle 2 – 10. Mehrfachvergleiche (Bonferroni) zwischen Hauptschule Typ B, Gesamtschule/ Erweiterungskurs und Realschule in der MSA-Prüfung bei Aufgabengruppe 1 („Basiskompetenzen“):

(a)	(b)	Mittlere Differenz (a) – (b)	Standardfehler	Signifikanz
Hauptschule - Typ B	Realschule	-1,312*	,176	**,000**
	Gesamtschule - EK	-1,259*	,186	**,000**
Realschule	Hauptschule - Typ B	1,312*	,176	**,000**
	Gesamtschule - EK	,053	,159	**1,000**
Gesamtschule - Erweiterungskurs	Hauptschule - Typ B	1,259*	,186	**,000**
	Realschule	-,053	,159	**1,000**

*. Die Differenz der Mittelwerte ist auf dem Niveau 0.05 signifikant.

Über die Leistungsbewertungen der einzelnen Aufgaben hinaus hatten die Lehrerinnen und Lehrer auch übergreifende Kompetenzen zu bewerten, die „Darstellungsleistung“ mit max. 6 Punkten und den „Umgang mit Maßeinheiten“ mit max. 3 Punkten. Bei der Darstellungsleistung fallen in *allen drei* Schulformen die Bewertungen statistisch ununterscheidbar aus. Bei der Bewertung des Umgangs mit Maßeinheiten stellt sich indes statistisch deutlich das bisherige Muster wieder ein.

Es ist bei dieser sehr deutlichen Datenlage kritisch zu fragen, welche Auswirkungen eine solche Verteilung der Leistungsbewertungen auf zwei signifikant unterschiedliche Gruppen – „Hauptschule/Typ B“ gegenüber „Realschule & Gesamtschule/Erweiterungskurs“ – letztlich auf die Berufschancen der Jugendlichen hat. Können die Schülerinnen und Schüler mit einem Mittleren Schulabschluss aus der Hauptschule Typ B noch mit den übrigen Schülerinnen und Schülern mit dem gleichen Abschluss fair konkurrieren? Es ist schwer entscheidbar, inwieweit von den zukünftigen Arbeitgebern unterschiedliche Schulformen bei ein und derselben Qualifikation, nämlich dem „Mittleren Schulabschluss“, wahrgenommen werden. Analoges gilt auch für die Notengebung, die den auch aus Hauptschule Typ B prinzipiell möglichen Übergang zur gymnasialen Oberstufe regelt.

Geht man noch einen weiteren Schritt zurück und untersucht die Notenvergaben innerhalb der Schulform Hauptschule (stets Klasse 10), dann ist man mit dem folgenden Problem konfrontiert: Beide Hauptschulgruppen, die Schülerinnen und Schüler im Typ A und die im Typ B schreiben zwar unterschiedliche zentrale Prüfungen und erreichen damit unterschiedliche Schulabschlüsse . Sie treten dann aber beide als Absolventen der Klasse 10 der Hauptschule auf. Ihre Noten spiegeln freilich keineswegs den unterschiedlichen Anspruch in beiden Schultypen wider. Die Schülerinnen und Schüler aus der anspruchsvolleren Hauptschule Typ B schließen mit der ambitionierteren zentralen Prüfung MSA ab und erzielen demnach die weitaus schlechteren Noten; denn sie müssen sich ja an den Real-

[14] Vgl. die Hinweise zum Datensatz „Modul 2“ in Kap. 1.3.1. Basis ist eine maximal zu erreichende Punktzahl 18 in Aufgabe 1.

schulen und den Erweiterungskursen der Gesamtschulen messen lassen. Die Schülerinnen und Schüler aus Hauptschule Typ A können umgekehrt in der HSA-Prüfung fast eine Notenstufe besser abschließen. Die Tabelle zeigt abermals sehr deutliche Unterschiede.

Tabelle 2 – 11. Gegenüberstellung der Notenverteilungen für die Schülerinnen und Schüler aus Hauptschule Typ A (mit HSA-Prüfung) und Hauptschule Typ B (mit MSA-Prüfung):

		sehr gut	gut	befriedigend	ausreichend	mangelhaft	ungenügend	Durchschnittsnote
Hauptschule - Typ A in der HSA-Prüfung	Anzahl	38	68	48	25	15	1	**2,56**
	%	19,5%	34,9%	24,6%	12,8%	7,7%	,5%	
Hauptschule - Typ B in der MSA-Prüfung	Anzahl	5	59	153	130	73	1	**3,50**
	%	1,2%	14,0%	36,3%	30,9%	17,3%	,2%	

Wieder stellt sich die Frage nach den Auswirkungen bei Bewerbungen im Arbeitsmarkt. Die Schülerinnen und Schüler aus der Hauptschule Typ B ziehen bei jedem der beiden Vergleiche – gegenüber den anderen MSA-Schulformen (und später erst recht gegenüber dem Gymnasium) und gegenüber der Hauptschule Typ A – den Kürzeren. „Objektiv“ muss man zwar aufgrund unterschiedlicher Lerngelegenheiten beide Vergleiche als inadäquat ansehen; ob diese Differenzierung jedoch beim Übergang ins Berufsleben z.B. von einstellenden Arbeitgebern noch vorgenommen wird, ist durchaus zu bezweifeln.

Übrigens zeigt ein schulforminterner Vergleich der in den beiden verschiedenen Prüfungen HSA bzw. MSA erzielten Noten für die Gesamtschulen (Grundkurse gegenüber Erweiterungskursen) weitaus geringere Unterschiede.

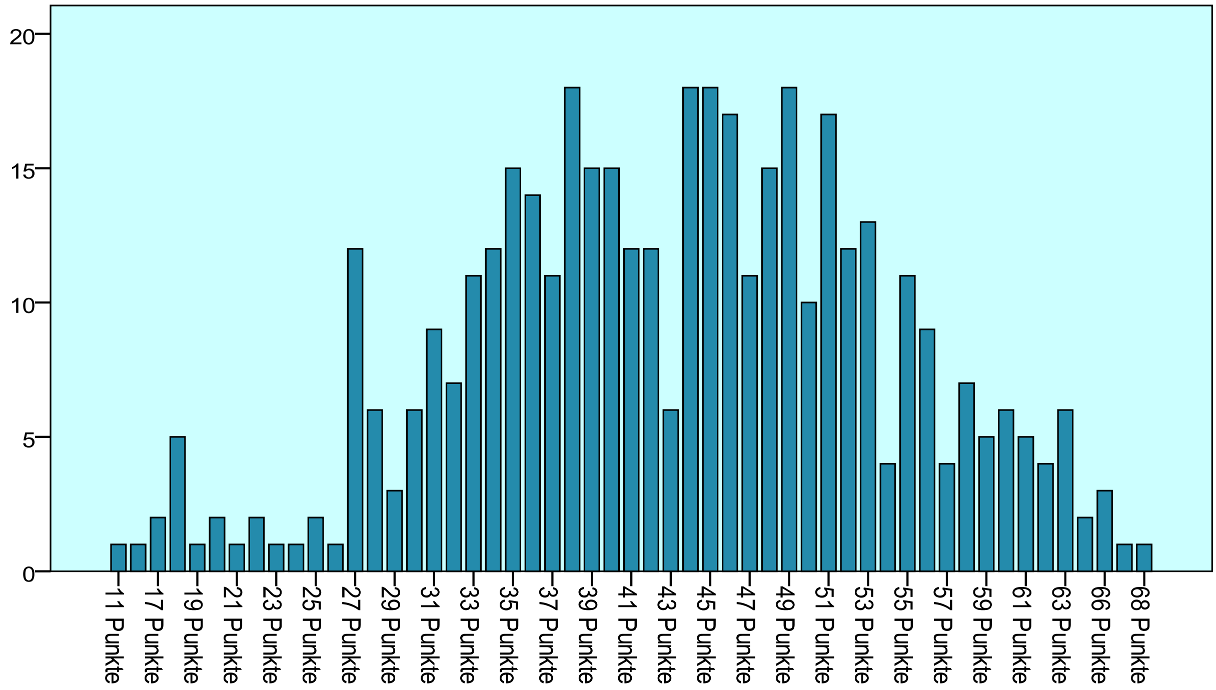
Tabelle 2 – 12. Gegenüberstellung der Notenverteilungen für die Schülerinnen und Schüler aus Gesamtschule/Grundkurs (mit HSA-Prüfung) und Gesamtschule/Erweiterungskurs (mit MSA-Prüfung):

		sehr gut	gut	befriedigend	ausreichend	mangelhaft	ungenügend	Durchschnittsnote
Gesamtschule / Grundkurs in der HSA-Prüfung	Anzahl	78	172	141	75	41	2	2,68
	%	15,3%	33,8%	27,7%	14,7%	8,1%	,4%	
Gesamtschule / Erweiterungskurs in der MSA-Prüfung	Anzahl	66	187	186	114	35	1	2,78
	%	11,2%	31,7%	31,6%	19,4%	5,9%	,2%	

Auch die Lehrerinnen und Lehrer an der Hauptschule scheinen sich der Problematik der Notengebung aus der MSA-Prüfung für die Schülerinnen und Schüler in der Hauptschule Typ B bewusst zu sein. Sie reagieren darauf so, dass sie versuchen, Schülerinnen und Schüler wenn irgend möglich letztendlich auf die Note „befriedigend“ zu heben. Die Übersicht über die Verteilungen der Punktzahlen für Hauptschule Typ B zeigt nämlich eine auffallend deutliche Lücke bei 43 Punkten. Dies ist genau der Übergang von „ausreichend“ nach „befriedigend“[15]. Beim Übergang von „mangelhaft“ nach „ausreichend“ (von 33 nach 34 Punkten) ist dieser Effekt allerdings nur schwach erkennbar.

[15] Die Unstimmigkeit im Datensatz bei der Bewertung von Aufgabe MSA-1f1 hat hierauf keinen Einfluss. Allenfalls kämen dann einige wenige dieser Schülerinnen und Schüler sogar auf 45 Punkte innerhalb der Note „befriedigend“.

Abbildung 2 – 13. Verteilung der Punktzahlen in der MSA-Prüfung auf die Schülerinnen und Schüler der Hauptschule Typ B (Häufigkeiten der Punktzuweisungen):



Auf dem Hintergrund der Daten zu allen diesen Gesichtspunkten – Noten- und Punkte-Vergleich zwischen den Schulformen mit Abschluss MSA, Vergleich auf der Aufgabenebene, Rückvergleich innerhalb der Schulform Hauptschule, Versuch der Notenadjustierung – ist aus der Perspektive einer Würdigung der Leistungen der Hauptschule Typ B heraus zu überlegen, ob eine gemeinsame Abschlussprüfung für alle drei Schulformen in der MSA-Variante der ZP-10 überhaupt angemessen ist. Denn für jede Schulform existiert ja ein eigener Kernlehrplan. Jede Schulform bietet ein deutlich profiliertes Angebotsspektrum und damit differenzierte Anregungs- und Lerngelegenheiten. Eine Abschlussprüfung ist aber ein schulnaher Test mit „high stakes“-Charakter, der auf die curricularen Vorgaben der einzelnen Schulformen reagieren sollte, und per Intention eben kein „low stakes“-Test wie beispielsweise PISA, der von der Anlage her curricular fern konstruiert sein kann und „literacy“ prüfen soll. Dass es gemeinsame Kompetenzen gibt, die am Ende der Sekundarstufe I in allen Schulformen erreicht werden sollten, ist von dieser Feststellung nicht berührt. Zu konstatieren sind aber die offenbar erheblich differenten Entwicklungsmilieus in den drei Schulformen, die eine zentrale Prüfung respektieren (und abbilden) sollte.

2.2.3 Leistungsstarke und leistungsschwache Klassen

Wie in der HSA-Prüfung treten auch in der MSA-Prüfung erhebliche Leistungsunterschiede zwischen den Klassen auf. Für eine Analyse der Gründe fehlen wie dort viele relevante Parameter. Die Unterschiede können lediglich illustriert werden durch eine Gegenüberstellungen der Ergebnisse (Basis: Noten). Da insbesondere in der Hauptschule Typ B die beiden Extremfälle außerordentlich herausstechen, zeigen wir pro Schulform jeweils die beiden leistungsstärksten bzw. leistungsschwächster Klassen.

Tabelle 2 – 14. Notenvergaben[16] in den beiden leistungsstärksten bzw. leistungsschwächsten Klassen der MSA-Prüfung:

		Klassenstärke	Mittelwert Endnote	Standardabweichung	Standardfehler	beste Note	schlechteste Note
Hauptschule / Typ B	stärkste Klassen	21	2,48	,750	,164	1	4
		22	2,95	,899	,192	1	5
	schwächste Klassen	26	4,00	,894	,175	2	5
		18	4,61	,502	,118	4	5
Realschule	stärkste Klassen	24	2,00	,659	,135	1	3
		24	2,04	,690	,141	1	3
	schwächste Klassen	30	3,50	1,075	,196	1	5
		22	3,59	,854	,182	2	5
Gesamtschule / Erweiterungs - kurs	stärkste Klassen	27	1,89	,801	,154	1	4
		28	2,07	1,086	,205	1	5
	schwächste Klassen	27	3,37	,884	,170	2	5
		25	3,64	,995	,199	2	5

2.2.4 Mädchen-Jungen-Unterschiede

Es treten auch in der MSA-Prüfung Unterschiede zwischen Mädchen und Jungen auf. Sie fallen insgesamt zugunsten der Jungen aus, wie zunächst der Mittelwertvergleich zeigt:

Tabelle 2 – 15. Unterschiede zwischen Mädchen und Jungen in der MSA-Prüfung insgesamt (alle Schulformen) auf der Basis der erreichte Punktzahlen:

	Anzahl der Schülerinnen und Schüler	Mittelwert Punktzahl	Standardabweichung	Standardfehler
Mädchen	913	47,21	11,118	,368
Jungen	885	51,08	10,649	,358
gesamt	1798	49,11	11,057	,261

Anders als in der HSA-Prüfung sind nun die Unterschiede zwischen Mädchen und Jungen insgesamt und auch einzeln in allen drei Schulformen signifikant (ONEWAY ANOVA):

Tabelle 2 – 16. Unterschiede zwischen Mädchen und Jungen in der MSA-Prüfung nach Schulformen (Basis: erreichte Punktzahlen):

	Mittelwert Mädchen	Mittelwert Jungen	Signifikanz
Hauptschule/Typ B	40,20	46,35	$df = 1$; $F = 38{,}251$; $p < 0{,}001$
Realschule	48,97	42,49	$df = 1$; $F = 23{,}734$; $p < 0{,}001$
Gesamtschule/Erweiterungskurs	50,02	52,50	$df = 1$; $F = 7{,}670$; $p = 0{,}006$
alle Schulformen	47,21	51,08	$df = 1$; $F = 56{,}822$; $p < 0{,}001$

Den Gründen wird hier nicht weiter nachgegangen, so dass diese Ergebnisse wieder anschaulich gemacht werden, indem diejenigen Aufgaben angegeben werden, die *keine* signifikanten Mädchen-Jungen-Unterschiede aufweisen.

In der ersten Tabelle werden (im Vorgriff auf den nächsten Abschnitt) die Aufgaben aufgezählt, die in den Prüfungsvarianten MSA und MSA-Gy identisch sind. Diese Aufgaben sind von allen MSA- und MSA-Gy-Schülerinnen und Schülern bearbeitet. Es ist aber keineswegs so, dass alle Aufgaben in jeder der Schulformen gleichermaßen *keinen* Mädchen-Jungen-Unterschied aufweisen. Neben den Charakteristika der Aufgaben spielen also offenbar noch andere Parameter für diese Unterschiede eine Rolle.

[16] Noten von uns nachträglich berechnet; vgl. die Hinweise zum Datensatz „Modul 2“ in Kap. 1.3.1.

Tabelle 2 – 17. Aufgaben OHNE signifikanten Unterschied (5 %-Niveau) zwischen Mädchen und Jungen in der MSA und der MSA-Gy Prüfung (identische Aufgaben). Basis: Mittlere erreichte Punktzahl:

„sign.“ = signifikanter Unterschied zwischen Mädchen und Jungen auf $p < 0,05$.

Aufgabe	Kurzbezeichnung	max. Punkt-zahl	Hauptschule Typ B		Realschule		Gesamtschule Erweiterungs-kurs		Gymnasium	
			w	m	w	m	w	m	w	m
MSA-1d MSA-Gy-1d	Schrittmaßregel	2	0,95	1,03	1,37	1,36	1,19	1,33	1,66	1,70
MSA-1e1 MSA-Gy-1e1	Blitz und Donner - Entfernung	2	sign.	sign.	1,87	1,85	1,81	1,85	1,91	1,93
MSA-1e2 MSA-Gy-1e2[17]	Blitz und Donner - Hören	2	sign.	sign.	1,87	1,85	1,81	1,85	1,91	1,93
MSA-2c MSA-Gy-2b	nicht bewässerte Fläche, Rechteck	3	1,96	2,08	2,13	2,15	1,98	1,99	2,63	2,63
MSA-3c MSA-Gy-3a	Fehlerwahrscheinlichkeit inhaltlich	4	2,86	2,95	3,22	3,34	3,20	3,31	3,54	3,61
MSA-3d2 MSA-Gy-3b2	2 Treffer	3	0,84	1,05	sign.	sign.	1,95	2,05	sign.	sign.
MSA-3d3 MSA-Gy-3b3	nur 1 Treffer	3	0,49	0,61	1,20	1,38	1,56	1,47	1,89	1,99
MSA-4d1 MSA-Gy-4a1	welche Parabel	1	sign.	sign.	sign.	sign.	sign.	sign.	0,97	0,98
MSA-4d2 MSA-Gy-4a2	Erkläre Funktionsgleichung	2	sign.	sign.	1,50	1,55	1,45	1,42	sign.	sign.
MSA-4f MSA-Gy-4b	Abstand Brückenpfeiler 2	4	sign.	sign.	1,89	2,06	2,18	2,26	sign.	sign.
MSA-4g MSA-Gy-4c	Bestimme Spannweite	4	sign.	sign.	1,22	1,20	1,02	1,02	sign.	sign.

Es folgen nun diejenigen Aufgaben, die nur in der MSA-Prüfung vorkommen und *ohne* Mädchen-Jungen-Unterschied bleiben.

Tabelle 2 – 18. Aufgaben OHNE signifikanten Unterschied (5 %-Niveau) zwischen Mädchen und Jungen in der MSA-Prüfung. Basis: Mittlere erreichte Punktzahl:

„sign.“ = signifikanter Unterschied zwischen Mädchen und Jungen auf $p < 0,05$.

Aufgabe	Kurzbezeichnung	max. Punkt-zahl	Hauptschule Typ B		Realschule		Gesamtschule Erweiterungskurs	
			w	m	w	m	w	m
MSA-2a	Bewässerte Kreisfläche	3	2,71	2,78	2,84	2,80	2,82	2,79
MSA-3a	Fehlerwahrscheinlichkeit numerisch	1	0,74	0,80	0,85	0,85	0,87	0,87
MSA-4a	Höhe Stahlseil	1	sign.	sign.	sign.	sign.	0,84	0,89
MSA-4b	Abstand Brückenpfeifer 1	1	sign.	sign.	0,96	0,97	0,94	0,96
MSA-4c	Koordinaten Pfeilerspitze	1	0,93	0,93	0,96	0,96	0,97	0,97
MSA-4e	Berechne Strecke P_2P_3	4	sign.	sign.	sign.	sign.	3,19	3,22

[17] Vgl. die Bemerkung in Kap. 1.3.1 wegen der Identität beider Zeilen.

2.3 Ergebnisse der Prüfungsvariante MSA-Gy: Gymnasium

2.3.1 *Noten in der MSA-Gy-Prüfung und Punktevergabe in Aufgabengruppe 1: Tendenzielle Unterforderung*

Mit einer Durchschnittsnote von 2,53 fällt die Notenverteilung in der MSA-Gy-Prüfung nicht überraschend aus. Die Verteilung ist tendenziell flach und bemerkenswert zu den besseren Noten hin verschoben (Kurtosis: -,200; Schiefe: ,398). Man kann dies als einen Hinweis auffassen, dass die Prüfung tendenziell zu leicht für die Gymnasiasten ist.

Tabelle 2 – 19. Notenverteilung MSA-Gy-Prüfung[18]:

		sehr gut	gut	befriedi-gend	aus-reichend	mangel-haft	unge-nügend	Durch-schnitts-note
Gymnasium	Anzahl %	123 12,4	397 40,2	314 31,8	125 12,7	28 2,8	0 0	**2,53**[19]

Da aber die Aufgaben in den Prüfungsvarianten MSA und MSA-Gy großenteils übereinstimmen, ist es interessant, den Abstand der Gymnasien in der Benotung und Bepunktung gegenüber den anderen Schulformen so weit wie möglich festzuhalten. Wieder ist zunächst vom mathematikdidaktischen Standpunkt aus gerade die Aufgabengruppe 1, die „Basiskompetenzen" erfassen soll, besonders aufschlussreich. Sie ist identisch in *allen vier* Schulformen der MSA- und der MSA-Gy-Prüfung. Es ergibt sich nun eine Ergänzung und Verstärkung des bereits in der MSA-Prüfungsvariante erkannten Musters: Mit weitem Abstand rangiert die Hauptschule Typ B unter Realschule & Gesamtschule/Erweiterungskurs; nochmals signifikant darüber liegen die Ergebnisse im Gymnasium. Die Tabellen mit den Mehrfachvergleichen (Basis: Punktzahlen; max. Punktzahl 18 aufgrund der Datenlücke im Datensatz des Ministeriums; siehe 1.3.1) zeigen dies deutlich auf: Das Mittelwert-Bild und der Boxplot geben eine anschauliche Vorstellung von den deutlichen Schulformunterschieden, die sich im Übrigen in der Tendenz in allen anderen gemeinsamen Aufgaben der beiden Prüfungsvarianten MSA und MSA-Gy wieder finden.

Tabelle 2 – 20. Punktmittelwerte bei Aufgabengruppe 1 („Basiskompetenzen") in der MSA-Prüfung und der MSA-Gy-Prüfung:

	Anzahl der Schülerinnen und Schüler	Mittelwert	Standard-abweichung	Standard-fehler
Hauptschule – Typ B	421	11,70	2,967	,145
Realschule	788	13,01	2,696	,096
Gesamtschule – Erweiterungskurs	589	12,96	3,143	,130
gesamt MSA	1798	12,69	2,962	,070
Gymnasium	987	**14,88**	2,337	,074

[18] Von 1 Schülerin ist aus dem Datensatz „Modul 2" keine Note berechenbar, daher hier N=987. Noten von uns nachträglich berechnet; vgl. die Hinweise zum Datensatz „Modul 2" in Kap. 1.3.1.

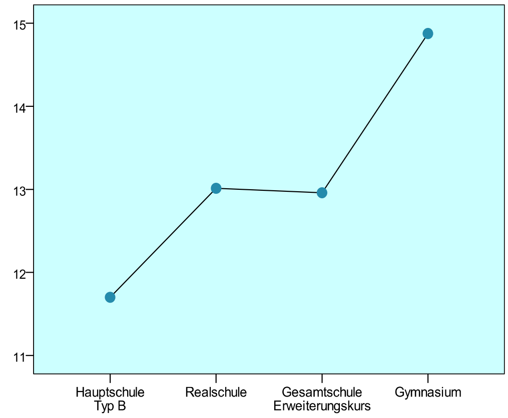
[19] Mittelwert 2,53; Standardabweichung 0,961; Standardfehler des Mittelwerts 0,031.

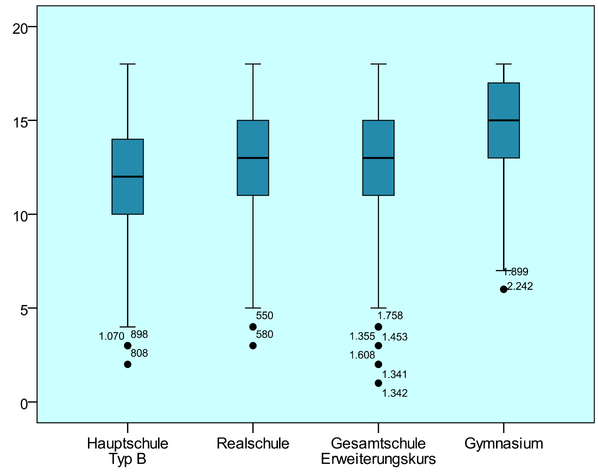
Tabelle 2 – 21. Mehrfachvergleiche (Bonferroni) zwischen Hauptschule Typ B, Gesamtschule/ Erweiterungskurs, Realschule und Gymnasium bei Aufgabengruppe 1 („Basiskompetenzen“):

(a)	(b)	Mittlere Differenz (a) – (b)	Standardfehler	Signifikanz
Hauptschule - Typ B	Realschule	-1,312*	,176	,000
	Gesamtschule - EK	-1,259*	,186	,000
	Gymnasium	**-3,176***	**,158**	**,000**
Realschule	Hauptschule - Typ B	1,312*	,176	,000
	Gesamtschule - EK	,053	,159	1,000
	Gymnasium	**-1,864***	**,130**	**,000**
Gesamtschule - Erweiterungskurs	Hauptschule - Typ B	1,259*	,186	,000
	Realschule	-,053	,159	1,000
	Gymnasium	**-1,917***	**,142**	**,000**

*. Die Differenz der Mittelwerte ist auf dem Niveau 0.05 signifikant.

Tabelle 2 – 22. Mittelwerte und Verteilung der Bewertung für die Bearbeitung von Aufgabengruppe 1 („Basiskompetenzen“); max. Punktzahl 18 :





2.3.2 Leistungsstarke und leistungsschwache Klassen

Auch in den Gymnasien gibt es bemerkenswerte Unterschiede zwischen den Klassen. In der besten Klasse wird sogar fast ein „sehr gut“ als Durchschnittsnote erzielt. Die leistungsschwächste Klasse hingegen kommt nur auf „ausreichend“ als Durchschnitt. Diesen enormen Unterschieden sollte – mit Daten, die uns allerdings nicht vorliegen – das Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen im Interesse der Qualitätsentwicklung im Mathematikunterricht weiter nachgehen.

Tabelle 2 – 23. Notenvergabe[20] in den beiden leistungsstärksten bzw. leistungsschwächsten Klassen der MSA-Gy-Prüfung:

Notenmittelwerte		Klassen-stärke	Mittelwert Endnote	Standard-abweichung	Standard-fehler	beste Note	schlechteste Note
Gymnasium	stärkste Klassen	24	1,54	,658	,134	1	3
		23	1,87	,757	,158	1	3
	schwächste Klassen	30	3,47	,900	,164	2	5
		22	3,64	,953	,203	2	5

[20] Noten nachträglich berechnet; vgl. die Hinweise zum Datensatz „Modul 2“ in Kap. 1.3.1.

2.3.3 Mädchen-Jungen-Unterschiede

Mädchen und Jungen verhalten sich in ihren Leistungen auch im Gymnasium unterschiedlich. Der Vergleich wird wieder, angemessen für eine „high stakes“-Prüfung, auf der Basis der Noten vorgenommen. Der Unterschied ist signifikant[21].

Tabelle 2 – 24. Notenvergabe[22] in der MSA-Gy-Prüfung, Unterschiede zwischen Mädchen und Jungen:

Notenmittelwerte	Anzahl der Schülerinnen und Schüler	Mittelwert Endnote	Standard-abweichung	Standard-fehler
Mädchen	512	2,67	,986	,044
Jungen	475	2,38	,909	,042
gesamt	987	2,53	,961	,031

Zur Illustration der Unterschiede dienen wieder diejenigen Aufgaben, bei denen sich *keine* signifikanten Geschlechtsunterschiede abzeichnen. Die Mehrzahl davon ist bereits im vorherigen Abschnitt aufgeführt worden, nämlich die 7 Aufgaben, die identisch in den beiden Prüfungsvarianten MSA und MSA-Gy sind und im Gymnasium ohne Mädchen-Jungen-Unterschied bleiben. In der gymnasialen Prüfungsvariante MSA-Gy kommen zusätzlich diese beiden Aufgaben *ohne* signifikanten Mädchen-Jungen-Unterschied vor:

Tabelle 2 – 25. Aufgaben OHNE signifikanten Unterschied (5 %-Niveau) zwischen Mädchen und Jungen, die nur in der MSA-Gy-Prüfung vorkommen (Mittelwerte der in der Gruppe erzielten Punkte):

Aufgabe	Kurzbezeichnung	max. Punkt-zahl	Gymnasium Punktmittelwerte	
			w	m
MSA-Gy-2d1	nicht bewässerte Fläche, Parallelogramm	3	2,49	2,57
MSA-Gy-3c	Korbwurf	5	2,03	1,90

[21] ONEWAY ANOVA: $df = 1$; $F = 20{,}840$; $p<0{,}001$

[22] Noten nachträglich berechnet; vgl. die Hinweise zum Datensatz „Modul 2“ in Kap. 1.3.1.

2.4 Lösungsquoten der einzelnen Aufgaben in der ZP-10

Die empirische Schwierigkeit einer Aufgabe kann man nach unterschiedlichen Modellen angeben. Es ist eine Frage der Funktion der Analyse, welches Modell man heranziehen will. In diesem Bericht geht es vorrangig um mathematikdidaktische Analysen. Daher ist die Aufgabenebene maßgeblich für viele Betrachtungen. Aus den Daten von Modul 2 liegen uns die Bewertungen durch die Lehrerinnen und Lehrer vor. Diese sind gehalten, sich nach Kriterien zu richten, die vom Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen vorgegeben sind (siehe Dokumentation im Anhang). Die Kriterien ihrerseits referieren auf die Kernlehrpläne des Landes und setzen die Intentionen um, die mit dem Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I verbunden sein sollen. Es ist daher sinnvoll, die realen Lösungsquoten möglichst direkt am Urteil der Lehrerinnen und Lehrer auszurichten.

Eine Aufgabe wird in den folgenden Tabellen daher als vollständig richtig gelöst angesehen, wenn die korrigierenden Lehrerinnen und Lehrer die maximal mögliche Punktezahl vergeben. Dieses Vorgehen reflektiert die Schwierigkeit einer Aufgabe am besten, denn etwaige Teilpunkte, beispielsweise für die Entnahme von Information aus dem Aufgabentext, haben dann keinen Einfluss. Zudem bedeuten in den Augen der Lehrerinnen und Lehrer Bepunktungen unter der maximalen Punktzahl immer, dass gewisse Mängel erkannt werden. Büchter & Pallack (2009) gehen in ihrer ministeriums-internen Diskussion der ZP-10 von 2007 weniger scharf vor. Bei Aufgaben mit 1 – 3 Punkten wählen auch sie die maximale Punktzahl als „gelöst“-Kriterium. Bei Aufgaben mit 4, 5 oder 6 möglichen Punkten, geben sie sich auch mit einem Punkt unter der Maximalzahl zufrieden.

In den drei Prüfungsvarianten ergeben sich daraus diese Lösungsquoten („Aufgabenschwierigkeiten“):

Tabelle 2 – 26. Aufgabenschwierigkeit (= prozentualer Anteil der Schülerinnen und Schüler, die die Maximalpunktzahl bei der Korrektur erreicht haben) in der HSA-Prüfung:

Aufgabe	Kurzbezeichnung	max. Punkt-zahl	Hauptschule Typ A in %	Gesamtschule Grundkurs in %
HSA-1a	Auto fährt 15 km in 10 min	2	86,7	82,5
HSA-1b	Kisten auf LKW	3	68,7	72,7
HSA-1c	Umfang Quadrat	2	93,8	83,1
HSA-1d	Fläche Figur	6	43,1	35,4
HSA-1e	Volumen Quader	3	92,8	87,0
HSA-1f1	Klassenarbeit, Note 2	2	96,9	96,1
HSA-1f2	Klassenarbeit, Teilnahme	3	89,7	85,3
HSA-2a	Beitragssatz 1980	1	95,9	96,9
HSA-2b	Beitragssatz verdoppelt	2	72,8	79,2
HSA-2c	Beitragssatz Dachdecker	4	44,1	34,4
HSA-2d1	Zusatzversicherung graphisch	1	72,2	77,6
HSA-2d2	Zusatzversicherung numerisch	2	20,0	22,0
HSA-3a	Seitenlänge Pappe	2	83,6	80,7
HSA-3b	Flächeninhalt Stern	3	62,6	50,3
HSA-3c1	Zeichne weißes Quadrat	3	55,4	49,5
HSA-3c2	Prozent der Quadratfläche	2	49,2	44,2
HSA-3d	Höhe Pyramide	4	21,5	18,3
HSA-3e	Volumen Pyramide	3	64,1	68,0
HSA-4a	Schaubild Eintrittspreise	1	63,1	64,8
HSA-4b1	Lohnt sich Tageskarte	2	67,2	70,1
HSA-4b2	Mit Tageskarte bleiben	2	26,7	15,1
HSA-4c1	Einnahmen	3	63,1	62,3
HSA-4c2	Zahl der Badegäste	2	77,9	67,4
HSA-4c3	Erwartete Besucher	3	59,0	48,3
HSA-4d1	Bahnen zu schwimmen	2	87,2	80,2
HSA-4d2	Zeit für 1 km	2	74,9	58,2

Tabelle 2 – 27. Aufgabenschwierigkeit (= prozentualer Anteil der Schülerinnen und Schüler, die die Maximalpunktzahl bei der Korrektur erreicht haben) in der MSA- und der MSA-Gy-Prüfung:

Aufgabe	Kurzbezeichnung	max. Punkt-zahl	Hauptschule Typ B in %	Realschule in %	Gesamtschule Erweiterungs-kurs in %	Gymnasium in %
MSA-1a MSA-Gy-1a	Modellauto	2	29,2	43,1	46,2	57,3
MSA-1b MSA-Gy-1b	Quadernetz	3	32,1	21,2	31,7	34,7
MSA-1c MSA-Gy-1c	Werkstück	3	50,8	52,7	55,2	71,8
MSA-1d MSA-Gy-1d	Schrittmaßregel	2	43,2	64,3	57,2	79,0
MSA-1e1 MSA-Gy-1e1	Blitz und Donner - Entfernung[23]	2	84,6	88,6	85,4	93,1
MSA-1e2 MSA-Gy-1e2	Blitz und Donner - Hören	2	84,6	88,6	85,4	93,1
MSA-1f1 MSA-Gy-1f1	„4“ bei 200 Würfen	2[24]	45,4	58,0	55,9	76,5
MSA-1f2 MSA-Gy-1f2	Schätzwert Wahrscheinlichkeit	2	31,8	46,1	47,0	71,7
MSA-2a	Bewässerte Kreisfläche	3	82,2	88,1	86,8	-----
MSA-2b MSA-Gy-2a	Geschwindigkeit Wasserarm	4	30,9	49,0	47,4	76,1
MSA-2c MSA-Gy-2b	nicht bewässerte Fläche, Rechteck	3	51,1	53,0	43,1	72,0
MSA-2d MSA-Gy-2c	Gesamtlänge Wasserleitungen	5	19,7	25,1	32,9	50,5
MSA-Gy-2d1	nicht bewässerte Fläche, Parallelogramm	3	-----	-----	-----	71,2
MSA-Gy-2d2	Höhe Parallelogramm	4	-----	-----	-----	9,5
MSA-3a	Fehlerwahrscheinlichkeit numerisch	1	77,0	85,3	86,9	-----
MSA-3b	Situation bei Trefferquote	1	52,0	63,5	67,6	-----
MSA-3c MSA-Gy-3a	Fehlerwahrscheinlichkeit inhaltlich	4	29,5	48,9	45,0	68,8
MSA-3d1 MSA-Gy-3b1	Wahrscheinlichkeiten eintragen	2	41,8	61,5	72,5	73,7
MSA-3d2 MSA-Gy-3b2	2 Treffer	3	24,2	49,5	59,9	73,2
MSA-3d3 MSA-Gy-3b3	nur 1 Treffer	3	10,0	30,7	35,3	52,1
MSA-Gy-3c	Korbwurf	5	-----	-----	-----	5,7
MSA-4a	Höhe Stahlseil	1	77,9	87,8	87,1	-----
MSA-4b	Abstand Brückenpfeiler 1	1	89,8	96,6	95,1	-----
MSA-4c	Koordinaten Pfeilerspitze	1	92,6	96,2	97,5	-----
MSA-4d1 MSA-Gy-4a1	welche Parabel	1	87,4	94,9	91,3	97,7
MSA-4d2 MSA-Gy-4a2	Erkläre Funktionsgleichung	2	52,0	64,8	57,9	77,1
MSA-4e	Berechne Strecke P_2P_3	4	62,5	70,8	69,7	-----
MSA-4f MSA-Gy-4b	Abstand Brückenpfeiler 2	4	15,0	18,5	26,1	47,8
MSA-4g MSA-Gy-4c	Bestimme Spannweite	4	4,3	16,8	12,6	37,9

[23] Vgl. zur Identität der Zeilen MSA-1e1 und MSA-1e2 die Hinweise in Kap. 1.3.1.

[24] Vgl. die Hinweise zum Datensatz „Modul 2“ in Kap. 1.3.1.: Nur maximal 2 Punkte in den Datensatz aufgenommen, jedoch 3 Punkte in den Auswertungsanleitungen.

Auch die auf der Ebene der einzelnen Aufgaben gezeigten Lösungshäufigkeiten unterstreichen, wie sehr sich die Schülerinnen und Schüler aus der Hauptschule Typ B von den Schülerinnen und Schülern aus den anderen Schulformen unterscheiden. In krassen Fällen variieren die Lösungsquoten zwischen Hauptschule Typ B und Gymnasium von 4% bis 40%, von 10% bis 50% oder von 30% bis 75%. Auch auf dieser Ebene kann man daher den bereits oben nach mehreren Gesichtspunkten diskutierten Schluss ziehen, dass eine gemeinsame ZP-10 im MSA-Bereich, die auch die Hauptschule Typ B einschließt, für diese nur zur Benachteiligung führen kann.

2.5 Profile der ZP-10 hinsichtlich der prozessbezogenen Kompetenzen

In den Kapiteln 3.2.4 und 4.1 werden die in der ZP-10 gestellten Aufgaben in die Kompetenzmatrix der Vorgaben des Ministeriums für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen eingeordnet. Für die Aufgaben des 2. Prüfungsteiles sind damit die in ihnen realisierten prozessbezogenen Kompetenzen nach den Kernlehrplänen von Nordrhein-Westfalen bestimmt. In deskriptiver Absicht berichten wir in diesem Abschnitt abschließend über die Lösungsquoten bei den Aufgabengruppen zu den drei[25] Kompetenzen

– Argumentieren/Kommunizieren,
– Problemlösen und
– Modellieren.

Die Darstellung bezieht sich nur auf die Aufgaben aus dem zweiten Prüfungsteil, da der erste Prüfungsteil schwerpunktmäßig den sog. Basiskompetenzen gewidmet ist und daher manche (nicht alle) dieser Aufgaben intentional schwer nach prozessbezogenen Kompetenzen einzuordnen sind. Aufgaben, die den Vorgaben zum 1. Prüfungsteil folgen, sind nicht berücksichtigt (vgl. Abbildungen 3-16, 3-18, 3-20 und Tab. 4-1, 4-3, 4-5). Die zu den prozessbezogenen Kompetenzen gehörenden Aufgaben sind demnach:

– *Argumentieren/Kommunizieren*:

in HSA:	2b, 4a	(2 Aufgaben, max. 3 Punkte)
in MSA:	4d1, 4d2, 4f, 4g	(4 Aufgaben, max. 11 Punkte)
in MSA-Gy:	3c, 4a1, 4a2, 4b, 4c	(5 Aufgaben, max. 16 Punkte)

– *Problemlösen*:

in HSA:	3a, 3d	(2 Aufgaben, max. 6 Punkte)
in MSA:	2c, 2d, 4e	(3 Aufgaben, max. 12 Punkte)
in MSA-Gy:	2b, 2c, 2d1, 2d2	(4 Aufgaben, max. 15 Punkte)

– *Modellieren*:

in HSA:	2c, 2d1, 2d2, 3c2, 4b1, 4b2, 4c1, 4c3, 4d2	(9 Aufgaben, max. 21 Punkte)
in MSA:	2b, 3d1, 3d2, 3d3	(4 Aufgaben, max. 12 Punkte)
in MSA-Gy:	2a, 3b1, 3b2, 3b3	(4 Aufgaben, max. 12 Punkte)

[25] Der vierten prozessbezogenen Kompetenz „Werkzeuge“ wurden keine Aufgaben zugeordnet, da diese Kompetenz sich durch alle anderen hindurch zieht. Nur in der HSA-Prüfung kommt sie einmal vor: Zeichengerät benutzen.

Das Vorgehen zur Darstellung der Leistungen der Schülerinnen und Schüler ist ähnlich „scharf“ wie das in 2.4 verwendete Modell für die vollständige Lösung einer Aufgabe. Wir legen zugrunde, dass eine prozessbezogene Kompetenz dann in einer Aufgabe von den Schülerinnen und Schülern gezeigt wird, wenn die Lehrerinnen und Lehrer in dieser Aufgabe die maximale Punktzahl vergeben. Jeder Schülerin, jedem Schüler wird dann zu einer prozessbezogenen Kompetenz als „Score“ die Summe der in den zugehörigen Aufgaben erzielten Punkte zugeordnet. Die Mittelwerte in den Schulformen über diese Scores bilden das Kompetenzprofil der jeweiligen zentralen Prüfung. Der durchschnittliche Summenscore wird schließlich als Prozentanteil an den maximal in der jeweiligen prozessbezogenen Kompetenz erzielbaren Punkten angegeben.

Diese Bewertung der Ergebnisse der Schülerinnen und Schüler in einer prozessbezogenen Kompetenz hängt natürlich von der Aufgabenkonstruktion ab; sie sagt etwas über die Zusammenstellung der jeweiligen ZP-10 aus und nur im Falle der HSA- und MSA-Prüfung können vergleichende Rückschlüsse auf erreichte Kompetenzen bei den Schülerinnen und Schülern gezogen werden.

Tabelle 2 – 28. Durchschnittswerte vollständig richtig gelöster Aufgaben zu den prozessbezogene Kompetenzen, angegeben in Prozent vom jeweils maximal erzielbaren Punktwert in der jeweiligen prozessbezogenen Kompetenz:

Argumentieren/ Kommunizieren

	Anzahl der Schülerinnen und Schüler	Mittelwert (in % der max. erreichbaren Punktzahl)	Standardabweichung	Standardfehler
Hauptschule / Typ A	195	69,6	32,6	2,3
Gesamtschule / Grundkurs	509	74,4	32,0	1,3
gesamte HSA-Prüfung	704	73,1	32,2	1,2
Hauptschule / Typ B	421	24,4	21,4	1,0
Realschule	788	33,3	25,2	0,9
Gesamtschule / Erw.-Kurs	589	32,9	26,9	1,1
gesamte MSA-Prüfung	1798	31,1	25,2	0,6
Gymnasium, **MSA-Gy-Prüfung**	986	39,0	24,0	0,8

Problemlösen

	Anzahl der Schülerinnen und Schüler	Mittelwert (in % der max. erreichbaren Punktzahl)	Standardabweichung	Standardfehler
Hauptschule / Typ A	195	42,2	31,9	2,3
Gesamtschule / Grundkurs	509	39,1	30,8	1,4
gesamte HSA-Prüfung	704	40,0	31,2	1,2
Hauptschule / Typ B	421	41,8	31,6	1,5
Realschule	788	47,3	31,2	1,1
Gesamtschule / Erw.-Kurs	589	47,7	32,3	1,3
gesamte MSA-Prüfung	1798	46,1	31,7	0,8
Gymnasium, **MSA-Gy-Prüfung**	986	48,0	25,9	0,8

Modellieren

	Anzahl der Schülerinnen und Schüler	Mittelwert (in % der max. erreichbaren Punktzahl)	Standardabweichung	Standardfehler
Hauptschule / Typ A	195	51,9	24,2	1,7
Gesamtschule / Grundkurs	509	46,0	23,9	1,1
gesamte HSA-Prüfung	704	47,7	24,1	0,9
Hauptschule / Typ B	421	25,8	28,2	1,4
Realschule	788	46,6	34,2	1,2
Gesamtschule / Erw.-Kurs	589	51,7	34,0	1,4
gesamte MSA-Prüfung	1798	43,4	34,3	0,8
Gymnasium, **MSA-Gy-Prüfung**	986	69,2	31,0	1,0

Der Vergleich der beiden Schulformen in der HSA-Prüfungsvariante fällt nur beim Modellieren signifikant unterschiedlich aus (zugunsten von Hauptschule Typ A). Problemlösen ist statistisch nicht unterscheidbar; hier (mit max. 6 Punkten) und beim Argumentieren/Kommunizieren (mit max. 3 Punkten) darf man aber die Ergebnisse aufgrund der geringen zu erreichenden Punktzahlen nicht überbewerten.

Tabelle 2 – 29. Unterschiede zwischen Hauptschule Typ A und Gesamtschule/Grundkurs auf den prozessbezogene Kompetenzen:(Basis: Prozent der erreichten Punktzahlen):

	Mittelwert Hauptschule Typ A	Mittelwert Gesamtschule /Grundkurs	Signifikanz
Argumentieren/Kommunizieren	69,6	74,4	$df = 1$; $F = 3{,}175$; $p = 0{,}075$
Problemlösen	42,2	39,1	$df = 1$; $F = 1{,}420$; $p = 0{,}234$
Modellieren	51,9	46,0	$df = 1$; $F = 8{,}619$; $p = 0{,}003$

Bei Mehrfachvergleichen über die Schulformen in der MSA-Prüfungsvariante sollte man erwarten, dass sich auch bei den Leistungen in den prozessbezogenen Kompetenzen das schon bekannte Muster – Hauptschule Typ B gegenüber Realschule & Gesamtschule/Erweiterungskurs – einstellen wird. Das bestätigt ein Vergleich (Bonferroni) tatsächlich deutlich für die beiden prozessbezogenen Kompetenzen Argumentieren/Kommunizieren und Problemlösen. Bei der Kompetenz Modellieren treten aber bemerkenswerterweise signifikante Unterschiede zwischen allen drei Schulformen auf, wobei sich die Gesamtschule/Erweiterungskurs von der Realschule zu einem höheren Mittelwert absetzt.

Tabelle 2 – 30. Mehrfachvergleiche (Bonferroni) zwischen Hauptschule Typ B, Gesamtschule/Erweiterungskurs und Realschule bei der prozessbezogenen Kompetenz „Modellieren“ (in %), Bezug: Tab. 2-28:

(a)	(b)	Mittlere Differenz (a) – (b)	Standardfehler	Signifikanz
Hauptschule - Typ B	Realschule	-20,8	2,0	,000
	Gesamtschule - EK	-25,9	2,1	,000
Realschule	Hauptschule - Typ B	20,8	2,0	,000
	Gesamtschule - EK	-5,0	1,8	,014
Gesamtschule - Erweiterungskurs	Hauptschule - Typ B	25,9	2,1	,000
	Realschule	5,0	1,8	,014

Analysen der Aufgabenstellungen

3 Aufgabenstellung – Merkmalsanalysen der in den zentralen Prüfungen ZP-10 gestellten Aufgaben

3.1 Zur Rolle von Aufgabe in der Mathematik – Aufgaben-Modelle

Leistungsüberprüfungen bedienen sich (nahezu) immer „Aufgaben“. Dies gilt für alle Fächer und für fast alle Arten von Prüfungen. Insbesondere zentrale Prüfungen sind traditionellerweise immer eine Kollektion bewusst zusammengestellter Aufgaben, die bestimmte Stoffbereiche oder bestimmte Kompetenzen erfassen sollen. Speziell im Fach Mathematik spielen Aufgaben aber noch eine weitaus gewichtigere Rolle. Seit jeher gruppieren sich nicht nur Leistungsüberprüfungen sondern oft der gesamte Mathematikunterricht um Aufgaben als zentrale Gestaltungselemente. Durch die Beschäftigung mit Aufgaben können Lernprozesse bei Schülerinnen und Schülern initiiert werden. Umgekehrt sind Aufgaben für Lehrerinnen und Lehrer, so Bromme, Seeger & Steinbring (1990, S. 3), „ein unabdingbares Fundament der Eigenständigkeit der Lehrertätigkeit“. Kurz, im Unterricht sind die Aufgaben die „’Schnittstelle’ der Tätigkeiten von Lehrern und Schülern“ (Bromme, Seeger & Steinbring 1990, S. 3).

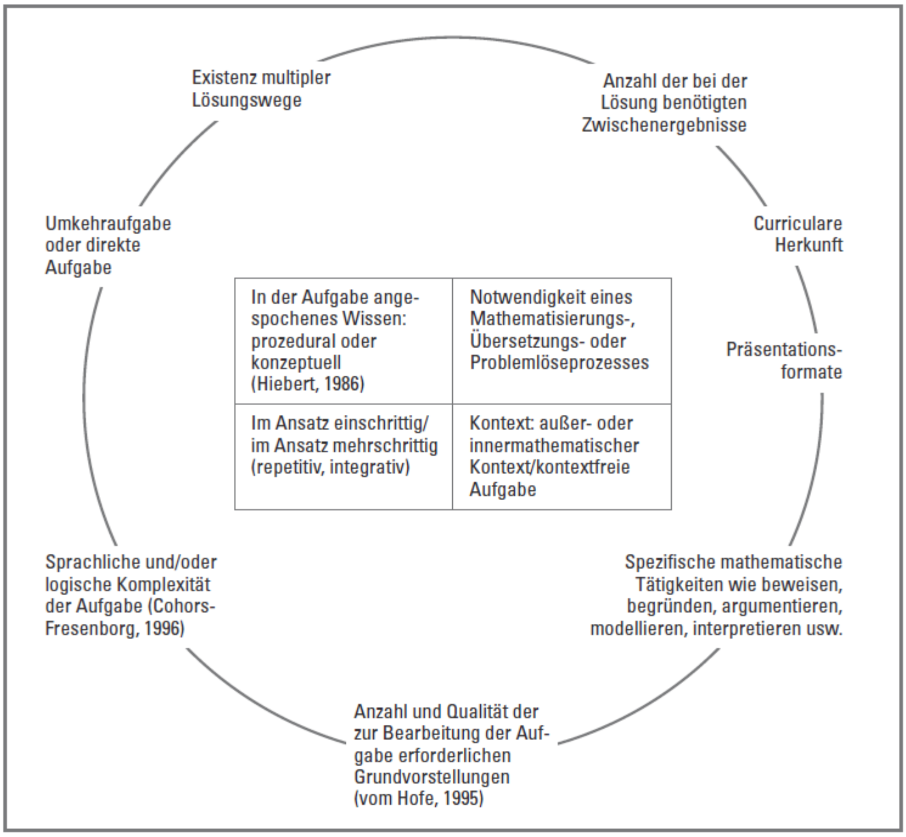
Dementsprechend sind Aufgaben seit jeher Gegenstand mathematikdidaktischen Denkens. Dies ist einerseits mit der Gefahr von Verkürzungen und Einseitigkeiten verbunden. So arbeitete schon Lenné (1969) heraus, dass der Mathematikunterricht allzu oft auf Aufgabenklassen mit jeweils typischen Lösungsverfahren („Aufgabendidaktik“) fokussiert und so strukturelles Denken eher verhindert. Auch die allgemein-fachlichen Orientierungen, die der Mathematikunterricht als zentrale Verpflichtung zu erfüllen hat, insbesondere insofern er Grundlagen für Übergänge in andere Bildungsphasen legen muss, sollte man nicht allein durch Aufgaben beschreiben (M. Neubrand, 2009), und man kann sie auch nicht allein durch eine auf die Bearbeitung von Aufgaben bezogene Didaktik erreichen. Das Umgehen mit Aufgaben im Mathematikunterricht kann aber auch im produktiven Sinne verstanden werden. Aufgaben sind – vorausgesetzt, die soeben genannten Beschränkungen werden bewusst mit bedacht – konstruktive Mittel, mathematikdidaktische Weiterentwicklungen in die Lehrerschaft hinein zu kommunizieren und umzusetzen. Dies geschieht derzeit in extensivem Ausmaß bei der Realisierung der Bildungsstandards als aktueller Grundlage des schulischen Mathematikunterrichts (Blum & al., 2006).

In besonderer Weise werden mit Aufgaben die mathematischen Inhalte eines Curriculums dann transportiert, wenn es um Prüfungsangelegenheiten geht. Sowohl für die Konstruktion solcher Aufgaben(-Sets) als auch für die nachträgliche Analyse der in einer Prüfung verlangten Kenntnisse und Kompetenzen ist es aber unabdingbar, Vorstellungen über „Aufgaben selbst“, gewissermaßen eine Ordnung der Merkmale, ein „Modell von Aufgabe“ zu entwickeln. Dafür gibt es konkurrierende Ansätze. Für die vorliegenden Analysen der zentralen Prüfungen in Nordrhein-Westfalen kommen vor allem zwei „Modelle von Aufgaben“ in Frage, weil sich damit die Grundideen bei der Aufgaben-Konstruktion durch das Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen am ehesten verorten lassen.

3.1.1 Das Aufgaben-Modell von PISA-2000 (deutsche PISA-Option)

Im ersten PISA-Zyklus im Jahr 2000 wurde neben der internationalen Studie auch eine ausführliche deutsche Option realisiert, „um in Deutschland vorherrschende Schwerpunkte des Mathematikunterrichts differenzierter und umfassender abzubilden“ (M. Neubrand, 2004, S.15). Die Grundlagen dafür sind seinerzeit ausformuliert worden (M. Neubrand u.a., 2001). Für die im Anschluss an PISA-2000 folgenden Analysen (Neubrand, 2004) wurden die verwendeten Aufgaben-Parameter in einem „Aufgabenmodell“ zusammengefasst (Abb. 3-1). Um die grundlegenden Eigenschaften einer Aufgabe (Wissen, Kontext, Modellierung, Aufwand; vgl. J. Neubrand, 2002) gruppiert sich eine Reihe von spezifischen Merkmalen, die alle – wie in M. Neubrand (2004) von verschiedenen Autoren untersucht – zur Schwierigkeit und zum kognitiven Anspruch der Aufgabe beitragen.

Abbildung 3 – 1. Aufgabenmodell von PISA-2000-Deutschland (M. Neubrand, 2004, S. 37): Zentrale Eigenschaften und vielfältige spezifische Aufgaben-Merkmale.



3.1.2 Das zyklische Modell des mathematischen Modellierens

Vielfach Eingang in die neuere mathematikdidaktische Literatur hat ein anderes „Modell von Aufgabe“ gefunden. Den Vorgang des Bearbeitens einer Aufgabe kann man – modellhaft und nicht im Sinne von empirischen, auf Individuen bezogenen Beschreibungsmustern – als eine Art „Modellierungsprozess“ ansehen. In einem sehr allgemeinen Sinne erfordert eine Aufgabe die Übertragung einer Situation in eine der mathematischen Verarbeitung zugängliche Form, das „mathematische Modell“; dessen Konsequenzen wiederum sind zu Information auf der Situationsebene zu transformieren (Abb.4). Es sind zahlreiche Varianten der Beschreibung dieses in seiner Struktur zyklischen Prozesses bekannt. Abb. 3-2 hält sich an die bei PISA-2000 verwendete Terminologie (in wesentlichen Teilen zurückgehend auf Schupp, 1988).

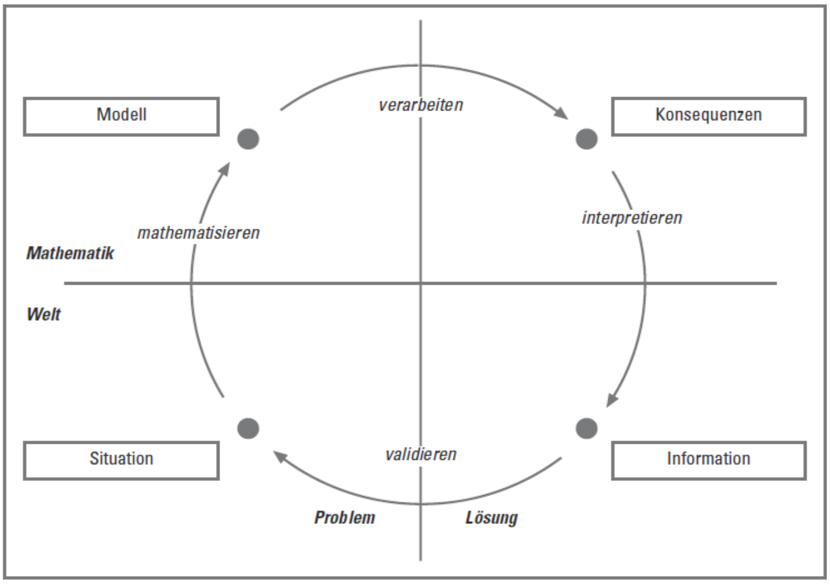


Abbildung 3 – 2. Der „Modellierungskreislauf" als Aufgaben-Modell (nach M. Neubrand, 2004, S. 36).

Mit dem Zyklus des Modellierens kann auch der komplexe – und für einen anspruchsvollen Mathematikunterricht besonders bedeutsame – Zusammenhang außermathematisch-modellierender Anforderungen und der Fähigkeit, innermathematische Probleme anzugehen, beschrieben werden. Eine „Situation", von der in einer Aufgabe ausgegangen wird, kann nämlich bei dieser allgemeinen Sichtweise sowohl eine außermathematische wie eine innermathematische Fragestellung sein. Es kann daher – abgesehen von den „technischen Aufgaben" (siehe unten) – dreierlei vorkommen, (1) dass eine Aufgabe ganz als außermathematische Modellierungsaufgabe anzusehen ist, (2) dass sie als eine innermathematisch-problemhaltige Aufgabe, in einem verallgemeinerten Sprachgebrauch somit als eine innermathematische Modellierungsaufgabe (Neubrand, 2003), erscheint oder (3) dass diese beiden Arten mathematischer Anforderungen in einer Aufgabe miteinander verschränkt vorkommen.

Unabhängig vom Kontext gibt es sowohl bei außermathematischen Modellierungsaufgaben wie bei innermathematischen problemhaltigen Aufgaben kognitive Prozesse, die als Übersetzen / Übertragen, Verarbeiten bzw. Interpretieren / Validieren angesprochen werden können, natürlich je unterschiedlicher Art im Konkreten. Die mögliche Verbindung außermathematischer und innermathematischer Kontexte besteht darin, dass die aus einer außermathematischen Situation kommende Mathematisierung nicht ein nach festen Regeln abzuarbeitendes mathematisches Modell erzeugt, sondern dass dieses Modell zuerst innermathematisch weiter zu klären ist, d.h. eine innermathematische Fragestellung (abermals eine „Situation") entsteht. Diese ist ihrerseits durch weitere innermathematische Schritte anzugehen und zu strukturieren. In die Aufgaben-Klassifikation für das COACTIV-Projekts (Jordan & al., 2006) wurde diese Sichtweise explizit einbezogen.

Bei anspruchsvollen wissenschaftlichen Modellierungen ist die Verschränkung außer- und innermathematischer Modellierungs- und Problemlöseprozesse sogar der Normalfall. Im schulischen Kontext treten solche Fälle weitaus bescheidener auf. Ein typisches Beispiel dafür aus dem Bestand der hier untersuchten Aufgaben ist etwa die Aufgabe 2 im 2. Prüfungsteil der HSA-Prüfung („Maren bastelt Sterne aus Pappe."), die unten bei der Erläuterung der Kontexte detaillierter besprochen wird.

Aufgaben mit „explizit“ vorgegebenem Ausgangspunkt für die mathematische Bearbeitung, bei denen also die Mathematisierung (im Sinne von Abb. 3-2) fehlt, und die auch keine Interpretation in Hinblick auf eine Situation erfordern, kann man als „technische“ Aufgaben bezeichnen. Sie kommen „ohne Kontext“ aus.

Das für diesen Bericht konstruierte Klassifikationssystem zur Beurteilung der *gestellten* Aufgaben (und später in Kap. 8 auch die Beurteilung der *bearbeiteten* Aufgaben) orientiert sich wesentlich, aber nicht ausschließlich, am Modellierungskreislauf. Insbesondere hält sich die Darstellung der einzelnen Aufgabenmerkmale in den folgenden Abschnitten dran, denn mit diesem „Modell von Aufgabe“ können die einzelnen Aufgaben-Merkmale übersichtlich geordnet und strukturiert werden, indem man sie als Anforderungen zu einzelnen Phasen des Modellierungskreislaufs begreift. Der Modellierungskreislauf ist aber vor allem deshalb für die Analyse der ZP-10 in Nordrhein-Westfalen angemessen,

– weil die überwiegende Zahl der Aufgaben der ZP-10 eine mehr oder weniger deutliche Realitätsorientierung aufweist und gerade für solche Aufgaben der Modellierungskreislauf ein adäquates und üblicherweise benutztes Modell darstellt,
– weil mathematikdidaktische Analysen, deren konkrete Aufgabenmerkmalen sich an einem inzwischen geläufigen Schema ausrichten, in die Lehrerschaft hinein am leichtesten kommunizierbar sind.

Die ersten Abschnitte der folgenden Analysen beginnen gemäß dem Modellierungskreislauf mit den Dimensionen Situation-Kontext bzw. Modell-Inhalt. Zur Verarbeitung des Modells gehören sodann Betrachtungen über die Aufgabenstellung insgesamt und das Umgehen mit den Ergebnissen. Zu diesen Analysen gehört auch eine Gesamteinschätzung der in den zentralen Prüfungen in Nordrhein-Westfalen gestellten Aufgaben entlang der vom Ministerium selbst vorgegebenen curricularen Rahmenbedingungen. Den Beschreibungen der einzelnen Variablen folgen in Kap. 4 Übersichten, die das mathematikdidaktische Gesamtprofil, insbesondere mit Bezug zu den prozessbezogenen Kompetenzen, der ZP-10 an der Hauptschule, an Realschule und Gymnasium aufzeigen können.

3.2 Aufgabenmerkmale entlang des Modellierungskreislaufs

3.2.1 Situation – Kontext

Das zentrale Moment, das Kontexte für die Aufgabenstellung und ebenso für Aufgabenlösungsprozesse bedeuten, wurde schon mit den Abb. 3-1 und 3-2 sichtbar. Aufgabenstellungen gehen, abgesehen von den rein technischen Aufgaben, von Situationen aus, und der Lösungsprozess startet i.a. innerhalb eines Kontexts. Der Kontext gibt den Rahmen und oft auch Hinweise, wie das Mathematisieren der Situation erfolgen kann. Das beeinflusst die Lösbarkeit der Aufgabe in beide Richtungen: Der Kontext kann positive Hinweise zu möglichen Ansätzen liefern, umgekehrt aber die Aufgabenlösung auch erschweren gegenüber einem schon vorgegebenen mathematischen Ansatz.

Die Kontexte und Situationen, die in den zentralen Prüfungen ZP-10 vorkommen, werden im Folgenden gewissermaßen aufsteigend von den sehr speziellen Vorgaben des Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen für diese Prüfungen bis zur allgemeinen Funktion von Kontexten aufgeschlüsselt. Zur Illustration der Zuordnungen von Kontexten zu Aufgaben werden Aufgabenbeispiele eingefügt.

1 NRW-Vorgaben von Situationen und Kontexten

Wie in Kap. 1.2.2 bereits beschrieben, hat das Ministerium den Schulen „Vorgaben" zugestellt, die die Vorbereitung auf die ZP-10 ermöglichen sollen. Im Wesentlichen handelt es sich dabei um inhaltlich-curriculare Vorgaben, entnommen den Kernlehrplänen des Landes; die inhaltliche Zuordnung der Aufgaben wird unter 3.2.4 näher betrachtet. Die Vorgaben des Ministeriums sind allerdings manchmal so detailliert, dass sie sogar einzelne Situationen angeben, aus denen die Aufgaben genommen werden können. Beispielsweise werden unter der inhaltlichen Vorgabe „Erstellung, Nutzung und Interpretation von Modellen" detailliert ganz spezifische Situationen genannt: „Tarife; Weg-Zeit-Zusammenhänge; Wachstumsprozesse (linear oder exponentiell); Prozent-, Zins- und Zinseszinsrechnung (z. B. Preisreduktion, Spar- und Kreditmodelle)". Die folgende Tabelle enthält alle vom Ministerium vorgegebenen Situationen.

Solche Zuspitzungen der Vorgaben bis zu speziellen Situationen sind vom mathematikdidaktischen Standpunkt aus nicht unproblematisch. Die Mathematik als Schulfach zieht ja ihre Bedeutung gerade aus der Universalität ihrer Konzepte (BLK, 1997), und mit einer allzu speziellen Kontext-Fokussierung nimmt man den Schülerinnen und Schülern einen Teil der Übertragungs- bzw. Mathematisierungsleistung ab, nämlich die Einbettung möglichst unterschiedlicher spezieller Situationen in eine allgemeine und übergreifende mathematische Struktur. Letztlich ist es freilich eine Frage der Balance, inwieweit durch Situationsvorgaben lediglich ein Rahmen oder bereits konkrete Aufgabenvorschläge angedeutet werden.

Inwieweit werden diese (die genannten und weitere) vorgegebenen Situationen von den gestellten Aufgaben eingehalten? Inwieweit gehen die in der Prüfung realisierten Aufgaben-Kontexte darüber hinaus? Die folgenden Tabellen zeigen dies für die drei Prüfungsvarianten HSA, MSA und MSA-Gy. In allen drei Varianten sind identische Vorgaben an Situationen gemacht. Die Prozentangaben beziehen sich jeweils auf den Aufgabenbestand in der jeweiligen Prüfungsvariante.

Tabelle 3 – 3. Art der Situation in einer Aufgabe nach den Vorgaben des Ministeriums (nach den Prüfungsvarianten HSA, MSA und MSA-Gymnasium):

Art der Situation nach Vorgaben des Landes NRW		HSA	MSA	MSA-Gy
öffentliche Zeitungsartikel, Zeitungstexte, Gebrauchsanweisungen	Anzahl	2	0	0
	%	7,7 %		
lineare Tarife, Stufentarife	Anzahl	3	0	0
	%	11,5%		
Weg-Zeitzusammenhänge, Temperaturunterschiede	Anzahl	2	3	3
	%	7,7%	10,7%	12,5%
Kosten, Bestimmung von Anzahlen	Anzahl	8	0	0
	%	30,8%		
Architektur, Verpackungen	Anzahl	0	9	5
	%		32,1%	20,8%
Preisreduktion, Spar- und Kreditmodelle, Wachstumsprozesse	Anzahl	0	0	0
	%			
keiner dieser Aspekte ist in der Aufgabe angesprochen, andere Situationen sind realisiert	Anzahl	7	13	13
	%	26,9%	46,4%	54,2%
nicht relevant für diese Aufgabe	Anzahl	4	3	3
	%	15,4%	10,7%	12,5%
gesamt		**26**	**28**	**24**
		100,0%	**100,0%**	**100,0%**

Die Analyse zeigt, dass nicht alle in den Vorgaben erwähnten Situationen ausgenutzt werden; so fehlen Preisreduktion, Spar- und Kreditmodelle, Wachstumsprozesse. Umgekehrt halten sich die Aufgabenstellungen in knapp der Hälfte der Fälle nicht an die spezifischen Situationen in den Vorgaben. Das erscheint angemessen, wenn man in Betracht zieht, dass die zentralen Prüfungen auch prozessbezogene Kompetenzen wie das Mathematisieren (auch unbekannter Situationen) einzubeziehen haben.

2 *Situationen nach PISA*

Die internationale OECD/PISA-Rahmenkonzeption klassifiziert die in den Aufgaben vorkommenden Situationen gewöhnlich nach der „Distanz“, die die Situation zu den die Aufgabe lösenden Schülerinnen und Schülern hat. Detaillierter beschreibt man diese Distanz durch Situationen, die ausgehend vom persönlichen Leben der Schülerinnen und Schüler zu Situationen aus Schule, Arbeit und Freizeit reichen, sich auf den Bereich des lokalen und schließlich des allgemeinen gesellschaftlichen Lebens erstrecken. Wissenschaftliche Situationen umfassen auch Beweise und Verallgemeinerungen von numerischen oder räumlichen Mustern. Zusammenfassend wird von persönlichen, bildungsbezogenen, beruflichen und öffentlichen Situationen gesprochen (OECD, 1999, S. 57). Diese „mehr oder weniger kontinuierliche Skala“ (OECD, 1999, S. 57) zu betrachten, zielt darauf, im Aufgabenbestand eine gewisse Ausgewogenheit an Authentizität zu erreichen.

Tabelle 3 – 4. Art der Situation in einer Aufgabe nach PISA (nach den Prüfungsvarianten HSA, MSA und MSA-Gymnasium):

Art der Situation nach PISA		HSA	MSA	MSA-Gy
persönlich: Situation aus dem persönlichen Leben	Anzahl	5	0	1
	%	19,2%	,0%	4,2%
bildungsbezogen: Situationen aus Schule, Arbeit und Sport (allgemein Freizeit)	Anzahl	7	8	7
	%	26,9%	28,6%	29,2%
beruflich: Situationen aus der lokalen Gemeinschaft und Gesellschaft, wie sie Schülern im täglichen Leben begegnen	Anzahl	3	3	3
	%	11,5%	10,7%	12,5%
öffentlich: Situationen aus der Gesellschaft, wie sie Schülern nicht im täglichen Leben begegnen	Anzahl	3	12	8
	%	11,5%	42,9%	33,3%
Aufgaben, die den PISA-Situationen nicht entsprechen	Anzahl	8	5	5
	%	30,8%	17,9%	20,8%
gesamt	**Anzahl**	**26**	**28**	**24**
	%	**100,0%**	**100,0%**	**100,0%**

Es fällt auf, dass Schülerinnen und Schüler aus dem HSA-Bereich eher weniger mit „öffentlichen“ Situationen konfrontiert werden. Das mag daran liegen, dass je „distanzierter“ (im Sinne von PISA) die Aufgaben werden, desto eher bei den Schülerinnen und Schülern Wissen über die Sache selbst möglicherweise nicht ausreichend vorhanden ist.

Ein Beispiel, das diese Problematik besonders deutlich aufzeigt, ist die Aufgabe 2 im Prüfungsteil 2 der HSA-Prüfung („Beitragssätze zur Krankenversicherung“). Die Aufgabentexte lassen erkennen, dass man bei den Schülerinnen und Schülern durchaus Sachkenntnisse voraussetzt, wenn man nicht nur unverstandene Rechnungen als Antworten will. Exemplarisch wird daher anhand dieser Aufgabe das Problem des stillschweigend vorausgesetzten Sachwissens in Kap. 5.2 näher diskutiert.

3 Kontexte generell: außermathematisch / innermathematisch / kontextfrei

Für die Einschätzung des Potentials einer Aufgabe für das Erfassen mathematischer Leistung ist es von großer Bedeutung, die Anwesenheit eines Kontexts zu dokumentieren. Denn keineswegs wird eine Aufgabe, in der ein Kontext angesprochen ist, schon dann gelöst, wenn die dahinterstehenden mathematischen Verfahren und Begriffe als solche vorhanden sind. Aufgaben unterscheiden sich daher nach der Art und dem Grad der Verbindung der Aufgaben mit umfassenderen Kontexten.

Der Kontext einer Aufgabe kann ein *außermathematischer* Kontext sein (in diesem Sinn wird das Wort Kontext üblicherweise benutzt). Jede Art von Realitätsbezug kann einen außermathematischen Kontext definieren. Es kann sich aber auch um einen *innermathematischen* Kontext handeln. Damit bezeichnen wir in einer erweiterten Auffassung, dass in der Aufgabe mehr oder weniger weitreichende Querverbindungen innerhalb des mathematischen Wissens selbst zu knüpfen sind (J. Neubrand, 2002). Reinen Rechenaufgaben nach Standardverfahren oder anderen unmittelbaren Verwendungen vorgegebener mathematischer Formeln oder Prozeduren weisen wir *keinen Kontext* zu. Insgesamt orientieren wir uns an dieser folgenden Einteilung, die in den nächsten Abschnitten erläutert wird:

Tabelle 3 – 5. Kontexte von Aufgaben (Einteilung):

Kontexte der Aufgaben								
Art der zugehörigen Situation	***außermathematisch***			***innermathematisch***				***ohne Kontext***
	rechnerisches Umgehen mit Größen	scheinbar realitätsorientierte Aufgaben	realitätsorientierte Aufgaben	Anknüpfen an curricular frühere Inhalte	verschiedene Teilgebiete eines Stoffgebiets	verschiedene Stoffgebiete	sonstiger innermathematischer Kontext	

Außermathematische Kontexte

Als außermathematische Kontexte fassen wir Realitätsbezüge aller Art auf. In der Aufgabe sind dann in irgendeiner Weise Gegenstände oder Phänomene aus der realen Welt angesprochen. Die Authentizität selbst ist dabei vom mathematikdidaktischen Standpunkt aus nicht das entscheidende Kriterium (Leuders & Leiß, 2006). Man kann außermathematische Kontexte daher in Aufgaben in verschiedenen Abstufungen beobachten. Die einfachste Art eines außermathematischen Kontexts ist das rechnerische Umgehen mit Anzahlen (gewisser Gegenstände) und maßzahlbehafteten Größen, die sich per se auf bestimmte Realitäten beziehen. Solche „measurement"-Aufgaben (J. Neubrand, 2002, S.113), bei denen mit Größen und Anzahlen nur gerechnet wird, kommen in den ZP-10 allerdings nicht vor. Darüber hinaus sind *Arten des außermathematischen Kontexts* gegeben durch

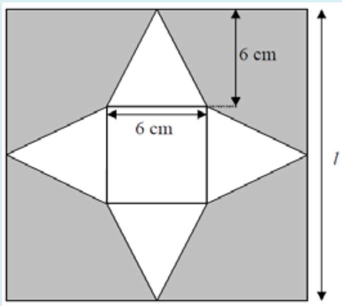
- nur zu Zwecken der Einkleidung der Aufgabe konstruierte Daten und Zusammenhänge (kurz: scheinbar realitätsorientierte Aufgaben),
- realitätsnahe bzw. realistische Daten und Zusammenhänge sowie authentische Situationen (kurz: realitätsorientierte Aufgaben)
- oder sonstige Aufgaben mit außermathematischem Kontext.

Ein Beispiel für einen außermathematischen Kontext in einer allerdings nur scheinbar realen Situation ist die Aufgabe *„Maren bastelt Sterne"*[26] aus der zentralen Prüfung für den Hauptschulabschluss. Dort liegt der außermathematischer Kontext so vor, dass die Schülerinnen und Schüler sich eine reale Situation („basteln") vorstellen müssen. Der außermathematische Kontext wird dabei durch den „Stamm" der Aufgabe aufgemacht. Es ist anschließend fast in der gesamten Aufgabe von der in diesem Aufgabenstamm beschriebenen „Pappe" die Rede. Auf diesen konkreten Gegenstand beziehen sich die Angaben in der Aufgabe und i.a. auch die Größen, die in den einzelnen Teilaufgaben berechnet werden sollen. Hier die erste Teilaufgabe:

[26] Zur leichteren Orientierung und besseren Referenz versehen wir jede in diesem Bericht als Beispiel diskutierte Aufgabe mit einer selbstgewählten suggestiven Überschrift. Die originalen Prüfungsaufgaben haben keine derartigen Überschriften. Sie sind dort nur mit Aufgabennummern versehen, auf die wir kurz mit HSA-*x* bzw. MSA-*y* bzw. MSA-Gy-*z*, je nach Prüfungsvariante verweisen.

HSA-3a - „Maren bastelt Sterne“

Maren bastelt Sterne aus Pappe. Sie zeichnet dazu ein Quadrat. An die vier Seiten des Quadrats zeichnet sie gleich große Dreiecke.



a) Berechne die Seitenlänge ℓ der oben abgebildeten Pappe. Notiere deine Rechnung.

Tabelle 3 – 6. Vorkommen außermathematischer Kontexte (nach den Prüfungsvarianten HSA, MSA und MSA-Gymnasium):

außermathematischer Kontext		HSA	MSA	MSA-Gy
vorhanden	Anzahl	22	25	21
	%	84,6%	89,3%	87,5%
nicht vorhanden	Anzahl	4	3	3
	%	15,4%	10,7%	12,5%
gesamt	**Anzahl**	**26**	**28**	**24**
	%	**100,0%**	**100,0%**	**100,0%**

In allen Schulformen tritt somit in der ZP-10 in der überwiegenden Anzahl der Fälle ein außermathematischer Kontextbezug in den Aufgaben auf. Dies entspricht der expliziten Realitätsorientierung, die sich durch alle Kerncurricula in NRW hindurch zieht. Die folgende Tabelle schlüsselt nun die vorkommenden außermathematischen Kontexte noch feiner auf nach der Art der in der Aufgabe angesprochenen Situation.

Tabelle 3 – 7. Vorkommen außermathematischer Kontexte (nach den Prüfungsvarianten HSA, MSA und MSA-Gymnasium):

Arten der außermathematischen Kontexte		HSA	MSA	MSA-Gy
scheinbar realitätsorientierte Aufgaben	Anzahl	19	13	13
realitätsorientierte Aufgaben	Anzahl	3	12	8
kein außermathematischer Kontext vorhanden	Anzahl	4	3	3
gesamt		**26**	**28**	**24**

Dass in einem wirklich strengen Sinn authentische Situationen (d.h. echte Zahlen, keine Glättungen von Informationen, redundante Datenlage, Notwendigkeit der Datenbeschaffung etc.) in zentralen Abschlussprüfungen nicht vorkommen (können), ist nach unserer Auffassung nicht notwendig ein Mangel. Hier muss man die spezifische Prüfungssituation für die Schülerinnen und Schüler berücksichtigen und die Funktion einer solchen Prüfung, die auf ein zeitlich limitiertes Überprüfen ausgerichtet ist. Die Tabelle zeigt aber, dass in der HSA-Prüfung die scheinbar realen Aufgaben weitaus überwiegen. Offenbar sollen sowohl die Anforderungen an das Mathematisieren (bei realen Aufgaben ist i.a. die Suche nach dem mathematischen Modell offener) als auch an das Verarbeiten (bei realen Aufgaben trifft man i.a. nicht auf geschönte Zahlenangaben) in dieser Prüfung in Grenzen gehalten werden. Nur in den MSA-Aufgaben ist eine annähernde Gleichverteilung zwischen realitätsorientierten und nur scheinbar realitätsorientierten Aufgaben erreicht; in der MSA-Gy-Prüfung überwiegen sogar die realitätsorientierten Aufgaben.

Innermathematische Kontexte

Wie erwähnt, sprechen wir von einem innermathematischen Kontext, wenn in einer Aufgabe Querverbindungen innerhalb des mathematischen Wissens selbst zu knüpfen sind (J. Neubrand, 2002). Man kann dabei differenzieren, wie weit diese Verknüpfungen innerhalb der Mathematik zu ziehen sind. Das kann eher „lokal" geschehen, wenn unterschiedliche Thematiken aus dem gleichen mathematischen Gebiet gemeinsam angesprochen werden. Es sind dann Kenntnisse aus verschiedenen Teilgebieten ein und desselben Stoffgebietes abzurufen. Sozusagen von „globaler" Reichweite ist der innermathematische Kontext, wenn in der Aufgabe verschiedene größere Stoffgebiete (Algebra, Geometrie, Funktionen, Prozentrechnung etc.) vorkommen. Ein innermathematischer Kontext kann auch durch Anknüpfung an früher Behandeltes gegeben sein, besonders dann, wenn es sich um explizite Rückgriffe auf curriculares Wissen vor dem 9./10. Schuljahr handelt.

Zwei dieser Arten innermathematischer Kontexte zeigen die folgenden Teilaufgaben (wieder aus der Aufgabe „Maren bastelt Sterne").

HSA-3c - „Maren bastelt Sterne"
c) Maren klappt ein Dreieck nach innen.

c 1) Zeichne das weiße Quadrat, auf dem ein vollständig umgeklapptes Dreieck liegt, in Originalgröße.

c 2) Wie viel Prozent der Quadratfläche werden durch die Dreiecksfläche bedeckt?

In c 1) wird an früher behandelte Stoffe (geometrisches Zeichnen, Effekte beim Umklappen, Begriff der Senkrechten und des Mittelpunktes) angeknüpft, in Teilaufgabe c 2) sind geometrische Größen mit Methoden der Prozentrechnung in Verbindung zu bringen, also zwei verschiedene Stoffgebiete.

Die folgende Tabelle zeigt das Vorkommen innermathematischer Kontexte, aufgeschlüsselt nach der Art der Situation in den Aufgaben.

Tabelle 3 – 8. Innermathematische Kontexte und Art des Kontextes in einer Aufgabe (nach den Prüfungsvarianten HSA, MSA und MSA-Gymnasium):

innermathematischer Kontext		HSA	MSA	MSA-Gy
aus verschiedenen Stoffgebieten („global")	Anzahl	1	1	2
	%	3,8%	3,6%	8,3%
aus verschiedenen Teilgebieten eines Stoffgebietes („lokal")	Anzahl	1	2	3
	%	3,8%	7,1%	12,5%
durch Anknüpfung an früher Behandeltes	Anzahl	4	2	2
	%	15,4%	7,1%	8,3%
sonstiger innermathematischer Kontext	Anzahl	0	5	5
	%	,0%	17,8%	20,8%
kein innermathematischer Kontext	Anzahl	20	18	12
	%	76,9%	64,3%	50,0%
gesamt	**Anzahl**	**26**	**28**	**24**
	%	**100,0%**	**100,0%**	**100,0%**

In einer Aufgabe können – wie bereits erwähnt – außermathematischer Kontext und innermathematischer Kontext gleichzeitig auftreten (vgl. auch Jordan & al., 2006). Die folgende Tabelle zeigt zunächst die Überschneidungen. Als Beispiel kann abermals die bereits oben diskutierte Teilaufgabe der Aufgabe „Maren bastelt Sterne“ genommen werden:

> *HSA-3c - „Maren bastelt Sterne“*
> c) Maren klappt ein Dreieck nach innen.
>
> c 1) Zeichne das weiße Quadrat, auf dem ein vollständig umgeklapptes Dreieck liegt, in Originalgröße.

Offenbar zeigt der Stamm der Aufgabe weiterhin auf einen außermathematischen Kontext: Das Dreieck wird als Pappfigur aufgefasst, die man „klappen“ kann. Auch die Wörter „vollständig umgeklappt“, „weißes Quadrat“ im Aufgabentext unterstreichen, dass nach wie vor auf einen konkreten Gegenstand zugegriffen wird. Zugleich besteht aber – siehe oben – ein innermathematischer Kontext durch Anknüpfen an früheres curriculares Wissen.

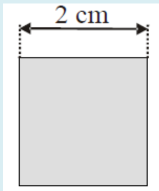
Tabelle 3 – 9. Gleichzeitiges Auftreten von außermathematischem und innermathematischem Kontext (nach den Prüfungsvarianten HSA, MSA und MSA-Gymnasium) – nur Anzahlen:

		innermathematischer Kontext	
	außermathematischer Kontext	**vorhanden**	**nicht vorhanden**
HSA	vorhanden	5	17
	nicht vorhanden	1	3
MSA	vorhanden	10	15
	nicht vorhanden	0	3
MSA-Gy	vorhanden	12	9
	nicht vorhanden	0	3

Aus der Tabelle ergibt sich zweierlei:

a) Je 3 Aufgaben[27] einer jeden Prüfungsvariante haben weder einen außermathematischen noch einen innermathematischen Kontext, sind also kontextfrei. Das tritt bei den sog. „technischen“ Aufgaben auf, bei denen entweder nur ein Ausrechnen einer gegebenen Formel oder Gleichung stattfindet oder nur das Einsetzen von Werten in eine geläufige Formel. Ein Beispiel ist die folgende Aufgabe aus dem Basisteil der HSA-Prüfung:

> *HSA-1c)*
>
> Berechne den Umfang des abgebildeten Quadrates.
> Notiere deine Rechnung.



b) Innermathematische Kontexte kommen in den Varianten MSA und MSA-Gy der ZP-10 nur vor, wenn gleichzeitig ein außermathematischer Kontext existiert. Dies zeigt das Fehlen von innermathematischen Problem- und Vertiefungsaufgaben an, ein Charakteristikum dieser Prüfungen.

[27] Es sind die Aufgaben HSA-1c, -1e und -3e sowie MSA/MSA-Gy-1b1, -1b2 und -1b3.

4 Funktion des außermathematischen Kontexts

Die soeben gemachte Beobachtung wirft die Frage auf, in welcher Art des Zusammenhangs außer- und innermathematische Kontexte in den Aufgaben stehen. Diese Frage berührt bildungstheoretische Grundlagen. Zwar leisten außermathematische Kontexte einen wesentlichen Beitrag zur mathematischen Grundbildung („mathematical literacy“; vgl. Neubrand, 2003; BLK, 1997). Die Funktion dieser Kontexte darf sich aber nicht darin erschöpfen, dass der Kontext selbst das alleinige Erkenntnisziel der Aufgabe ist. Auch die Bildungsstandards (Blum & al., 2006) sehen hinter dem oft dominierenden Realitätsbezug die Notwendigkeit, dass reale Kontexte auch zum Aufbau theoretischen mathematischen Wissens beitragen müssen (Kap. 2.0 in Blum & al., 2006; M. Neubrand, 2009).

Ein außermathematischer Kontext kann u.U. als Einleitung zu weiterer innermathematischer Auseinandersetzung verwendet werden. Er kann dann helfen, schwierige innermathematische Situationen sowohl sprachlich wie auch inhaltlich-begrifflich leichter zugänglich zu machen. Im ersten Fall dienen außermathematische Begrifflichkeiten dazu, die Verwendung möglicherweise komplizierter fachlicher Terminologien zu vermeiden und den gleichen Inhalt zu transportieren. So muss z.B. in der schon diskutierten Aufgabe „Maren bastelt Sterne“ nicht umständlich von einem gleichschenkligen Dreieck, dessen Basis eine Seite eines Quadrats ist und dessen Spitze auf der Gegenseite dieses Quadrats liegt, gesprochen werden. Die (außermathematische) Prozedur des Umklappens eines Pappstücks teilt eben diese Information mit.

HSA-3c - „Maren bastelt Sterne“
c) Maren klappt ein Dreieck nach innen.

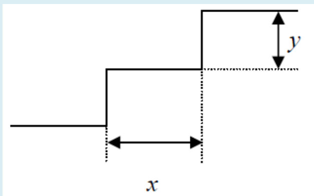
c 1) Zeichne das weiße Quadrat, auf dem ein vollständig umgeklapptes Dreieck liegt, in Originalgröße.

Die zweite Art von Verwendung eines außermathematischen Kontexts zeigt sich in der Aufgabe 1 d) „Schrittmaßregel“ des Prüfungsteils 1 des Realschul- und gymnasialen Tests. Der außermathematische Kontext gibt nun auch Hinweise, mit welcher Begrifflichkeit man in die Mathematisierung einsteigen kann. Hier ist es die naheliegende Aufforderung, die Formel mit einem vernünftigen Wert für x (etwa: 30 cm) auszuprobieren. Damit erschließt man sich nicht nur konkrete Werte für den Treppenbau, sondern vor allem wird nun der abstrakte funktionale Zusammenhang zwischen x und y verständlicher. Diese Funktion des außermathematischen Kontexts nimmt die Ideen auf, die hinter dem Ansatz der „realistic mathematics education“ (Freudenthal, 1983; de Lange, 1987) stehen: Mathematische Begriffe werden dadurch erschlossen, dass man sie als Werkzeuge zum Verstehen von Situationen einsetzt.

MSA-1d - „Schrittmaßregel“
d) Für den Bau von Treppen verwendet man häufig die folgende „Schrittmaßregel“ (siehe Skizze):

$$x + 2\,y = 63 \text{ cm}$$

Gib ein Wertepaar für x und y an, das die Gleichung erfüllt und für den Bau einer Treppe sinnvoll ist.



Neben diesen beiden Funktionen des außermathematischen Kontexts, die auf das Zusammenspiel von außer- und innermathematischen Ideen zielen, ist bei der Funktion des außermathematischer Kontexts auch zu beachten, wie eng die außermathematischen Kontexte auf bestimmte mathematische Gesichtspunkte zugeschnitten sind. Oft haben außermathematische Kontexte nur die Funktion, Standardverfahren aus der Mathematik ins Spiel zu bringen; das tritt vor allem beim linearen Umgehen mit Größen, insbesondere bei Fragen zur Prozentrechnung auf, aber auch darüber hinaus.

Tabelle 3 – 10. Funktionen des außermathematischen Kontexts (nach den Prüfungsvarianten HSA, MSA und MSA-Gymnasium):

Funktion des außermathematischen Kontexts		HSA	MSA	MSA-Gy
Kontext vereinfacht sprachlich eine innermathematische Situation	Anzahl	5	3	5
	%	19,2 %	10,7 %	20,8 %
Kontext erschließt begrifflich eine innermathematische Situation	Anzahl	0	4	4
	%	0 %	14,3 %	16,7 %
Kontext dient zum Umgehen mit Größen oder Prozenten	Anzahl	11	8	3
	%	42,3 %	28,6 %	12,5 %
Kontext umschreibt einen Anwendungsbereich (über das Umgehen mit Größen und die Prozentrechnung hinausgehend)	Anzahl	6	4	5
	%	23,1 %	14,3 %	20,8 %
Kontext dient zum Umgehen mit stochastischen Größen	Anzahl	0	6	4
	%		21,4 %	16,7 %
Aufgabe ohne außermathematischen Kontext	Anzahl	4	3	3
	%	15,4 %	10,7 %	12,52 %
gesamt	**Anzahl**	**26**	**28**	**24**
	%	**100,0%**	**100,0%**	**100,0%**

Dass eine relativ große Anzahl von Aufgaben mit Größen (und Prozenten) vorkommt, geht auf die generell „literacy“-orientieret Ausrichtung der ZP-10 zurück. Vor allem mit den HSA-Aufgaben „Maren bastelt Sterne“ wird gezeigt, wie ein Kontext einen einfachen sprachlichen Zugang zu mathematischen Begriffen öffnen kann. Von einfachen Flächenberechnungen bis zur Pyramide werden so geometrische Begriffe recht durchsichtig gemacht. Es könnte auch Potential zur Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts in diesem allgemeinen Ansatz, mit Kontexten umzugehen, liegen.

3.2.2 Mathematisieren

In den Kernlehrplänen von Nordrhein-Westfalen spielt die prozessbezogene Kompetenz des Modellierens eine zentrale Rolle. Am Ende der Sekundarstufe I soll erreicht werden: „Schülerinnen und Schüler nutzen Mathematik als Werkzeug zum Erfassen von Phänomenen der realen Welt.“ Das Mathematisieren ist nach Abb. 3-2 derjenige Teil des Modellierungsprozesses, der den – für die Lösungsfindung zentralen – Übergang vom Situativen zum Mathematischen beschreibt. Die Kernlehrpläne formulieren so: „Sie [die Schülerinnen und Schüler] übersetzen Realsituationen im mathematische Modelle (Terme, Gleichungen, Funktionen, Figuren, Diagramme. Tabellen, Zufallsversuche) (...)“.

Es handelt sich um einen in sich komplexen Prozess mit zahlreichen Zwischenstufen, die von verschiedenen Autoren unterschiedlich konzeptualisiert werden (Text- und Situationsverständnis als Voraussetzungen nach Reusser, 1992; Realmodell als Übergangsstufe nach Blum, 1996; Situationsmodell und Realmodell nach Leiß & al., 2010; u.v.a.). In diesem Abschnitt kommt es auf die Gesichtspunkte an, die unmittelbar der allgemeinen – nicht individuellen – Beschreibung der möglichen Lösungsprozesse dienen. Im Mittelpunkt der Analyse stehen daher Fragen, inwieweit bereits durch die Aufgaben-*Stellung* das Finden des mathematischen Modells überhaupt gefordert und dann auf unterschiedliche Weisen erschwert oder erleichtert werden kann.

Alle diese Gesichtspunkte sind Teil-Aspekte, die einen allgemeinen Begriff von „Komplexität einer Aufgabe“ umschreiben. Im Einzelnen können diese Fragen gestellt werden, um das Finden des mathematischen Modells bei einer Aufgabe zu charakterisieren:

- Liegt überhaupt eine Modellierungsaufgabe vor? Inwieweit ist Mathematisieren erforderlich oder stehen andere Komponenten des Modellierungskreislaufs im Vordergrund?
- Wie inhaltlich-komplex ist das mathematische Modell, das gefunden werden muss? Ist ein Schritt ausreichend oder sind Kombinationen mehrerer Schritte notwendig? „Repetitive“ oder „integrative“ Vorgehensweisen können vorkommen.
- Wie sprachlich-anspruchsvoll ist die zu lösende Aufgabe gestellt? Auch dies beeinflusst das Auffinden des mathematischen Modells, denn dem Mathematisieren ist i.a. ein sprachliches Decodieren vorgeschaltet (Brunner & al., 2010).
- Wie sehr erleichtern oder erschweren Informationen und Hinweise in der Aufgabe den Mathematisierungsprozess?

1 *Mathematisieren und andere Komponenten im Modellierungskreislauf*

Das Mathematisieren nimmt einen der zentralen Gesichtspunkte im PISA-Aufgaben-Modell (Abb. 3-1) auf. Nicht jede mathematische Aufgabe ist eine Modellierungsaufgabe, und nicht in jeder Modellierungsaufgabe ist das Mathematisieren die zentrale Aktivität.

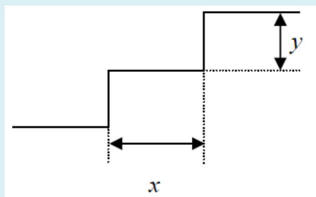
Beim Mathematisieren liegen die kognitiven Aktivitäten darin, das vorhandene mathematische Wissen geeignet zu aktivieren, zielgerichtet auszuwählen und zu gruppieren (J. Neubrand, 2002, S. 101 ff). Die meisten Modellierungsaufgaben erfordern solche Aktivitäten. Jedoch gibt es unter den Modellierungsaufgaben auch solche, bei denen andere Komponenten des Modellierungskreislaufs vorrangig sind. Eine davon ist die schon erwähnte Aufgabe zur Schrittmaßregel, bei der das mathematische Modell in Gestalt der Formel bereits vorliegt, aber ein passendes Beispiel dazu zu finden ist; es wird hier also nicht mathematisiert.

MSA-1d - „Schrittmaßregel“

d) Für den Bau von Treppen verwendet man häufig die folgende „Schrittmaßregel“ (siehe Skizze):

$$x + 2y = 63 \text{ cm}$$

Gib ein Wertepaar für x und y an, das die Gleichung erfüllt und für den Bau einer Treppe sinnvoll ist.



Ebenso gibt es Aufgaben, die z.B. die Interpretation von Daten erfordern. Mit dieser Einteilung ergibt sich als Aufgabenverteilung:

Tabelle 3 – 11. Mathematisieren und andere Komponenten im Modellierungskreislauf (nach den Prüfungsvarianten HSA, MSA und MSA-Gymnasium):

Mathematisierung notwendig?		**HSA**	**MSA**	**MSA-Gy**
keine der Komponenten des Modellierungskreislaufs ist erforderlich	Anzahl	6	7	3
	%	23,1 %	25,0 %	12,5 %
Modellierungskreislauf: Mathematisieren ist notwendig	Anzahl	20	16	16
	%	76,9 %	57,1 %	66,7 %
andere Komponenten des Modellierungskreislaufs sind vorrangig	Anzahl	0	5	5
	%		17,9 %	20,8 %
gesamt	**Anzahl**	**26**	**28**	**24**
	%	**100,0%**	**100,0%**	**100,0%**

Die ZP-10 nimmt also die Intentionen der Kernlehrpläne in Nordrhein-Westfalen sehr deutlich auf, indem die Mathematisierungsaufgaben den größten Raum einnehmen.

2 *„repetitiv" / „integrativ"*

Auch diese Überlegungen beziehen sich auf einen zentralen Gesichtspunkt im PISA-Aufgaben-Modell (Abb. 3-1; vgl. auch die deutsche PISA-Rahmenkonzeption: M. Neubrand & al., 2001). Dieser Aspekt ist auch verwandt, wenngleich nicht identisch, mit der Unterscheidung „Simplex-„ vs. „Komplex"-Aufgabe im Sachrechnen nach Breidenbach (1969; vgl. auch Franke, 2003). „Simplex-Aufgaben" bestehen nur aus einem einfachen Schritt beim Mathematisieren.

Es wird daher bei den Aufgaben differenziert, ob zur Lösung nur ein eng begrenzter Wissensbestandteil herangezogen werden muss, bzw. in welcher Weise mehrere Wissensbereiche zu aktivieren sind. Das Urteil wird „vom Standpunkt des Experten aus" (J. Neubrand, 2002) getroffen, d.h. es wird – bei der Beurteilung der Aufgaben-*Stellung!* – davon ausgegangen, dass die Aufgaben auf hohem mathematischen Niveau gelöst werden. In diesem Aufgaben-Charakteristikum erfassen wir[28]:

– Nur Wissen / Kenntnisse aus einem eng umgrenzten Stoffgebiet sind erforderlich.

– Wissen / Kenntnisse aus einem Stoffgebiet sind mehrmals in gleicher Weise anzuwenden („repetitiv").

– Wissen / Kenntnisse aus mehreren verschiedenen Stoffgebieten sind miteinander in Beziehung zu setzen und anzuwenden („integrativ").

Tabelle 3 – 12. „Repetitive" oder „integrative" Aufgabe (nach den Prüfungsvarianten HSA, MSA und MSA-Gymnasium):

Wissensbestandteile mehrfach anwenden?		**HSA**	**MSA**	**MSA-Gy**
Wissen / Kenntnisse aus einem eng umgrenzten Stoffgebiet	Anzahl	13	21	14
	%	50,0 %	75,0 %	58,3 %
Wissen / Kenntnisse aus einem Stoffgebiet sind mehrmals anzuwenden („repetitiv")	Anzahl	4	3	4
	%	15,4 %	10,7 %	16,7 %
Wissen / Kenntnisse aus mehreren Stoffgebieten sind anzuwenden („integrativ")	Anzahl	9	4	6
	%	3,8%	14,3	25,0 %
gesamt	**Anzahl**	**26**	**28**	**24**
	%	**100,0%**	**100,0%**	**100,0%**

[28] Im deutschen PISA-Framework (M. Neubrand & al., 2001) sind für Modellierungsaufgaben die Kategorien „einschrittig", „mehrschrittig/repetitiv" und „mehrschrittig/integrativ" genannt.

3 Sprachliche Gestaltung des Aufgabentexts

Ein weiteres Charakteristikum, das Aspekte der Komplexität einer Aufgabe aufnimmt, ist die sprachliche Gestaltung der Aufgabe. Diese hat unmittelbar Einfluss auf die Mathematisierung, denn vor dem Erstellen des Modells liegt die Phase des Verstehens der Situation, die stark durch die sprachliche Gestaltung der Aufgabe bestimmt wird (Brunner & al., 2010). In einer sehr spezifischen Art (Cohors-Fresenborg, 1996) sind sprachliche Aspekte auch in das PISA-Aufgaben-Modell (Abb. 1) aufgenommen. Wir unterschieden hier weit pragmatischer folgende Charakteristika:

- Unauffällige sprachliche Struktur.
- Schwierige sprachliche Struktur des Aufgabentextes, z.B. tiefgeschachtelte Nebensätze, sprachliche Umstellungen der Daten gegenüber dem rechnerischen Aufbau etc..
- Als spezielles Beispiel der sprachlichen Gestaltung einer Aufgabe nehmen wir noch das Auftreten nachgestellter Konditionalsätze hinzu.

Tabelle 3 – 13. Sprachliche Gestaltung des Aufgabentextes (nach den Prüfungsvarianten HSA, MSA und MSA-Gy):

sprachliche Komplexität		**HSA**	**MSA**	**MSA-Gy**
unauffällige sprachliche Struktur	Anzahl	24	22	18
	%	92,3%	78,6%	75,0%
schwierige sprachliche Struktur	Anzahl	0	3	3
	%	,0%	10,7%	12,5%
nachgestellter Konditionalsatz	Anzahl	2	3	3
	%	7,7%	10,7%	12,5%
gesamt	**Anzahl**	**26**	**28**	**24**
	%	**100,0%**	**100,0%**	**100,0%**

Die Daten zeigen, dass mit der sprachlichen Gestaltung der ZP-10 sorgfältig umgegangen wurde.

Wir zeigen daher Phänomene, wie mit den Aufgabentexten eine Aufgabe beeinflusst werden kann, hier nur beispielhaft auf. Speziell findet man z.B. in deutschen mathematischen Aufgaben oft nachgestellte Konditionalsätze. Das folgende Beispiel zeigt eine solche Sprachfigur: In der Teilaufgabe d 2 hätte diese Umstellung ohne weiteres auch mit Hauptsätzen formuliert werden können: „Franzi braucht für die ersten vier Bahnen insgesamt zwei Minuten. Sie kann dieses Tempo gleichmäßig halten. Wie lange braucht sie für die gesamte Strecke (1 km)?“ Eher unauffällig erscheint zunächst (und so ist sie auch klassifiziert) die zweite Teilaufgabe d 1. Doch auch hier ist der Intentionalsatz nachgeschoben, obwohl er in einfacher Sprache auch vorangestellt sein könnte: „Franzi will eine Strecke von 1 km zurückzulegen. Wie viele Bahnen muss sie schwimmen?“

HSA-4d1, 2 - „Freizeitbad“

d) Die Länge einer Bahn im Freizeitbad WATERWORLD beträgt 25 m.

d 1) Wie viele Bahnen muss Franzi schwimmen, um eine Strecke von 1 km zurückzulegen? Notiere deine Rechnung.

d 2) Franzi braucht für die ersten vier Bahnen insgesamt zwei Minuten. Wie lange braucht sie für die gesamte Strecke (1 km), wenn sie dieses Tempo gleichmäßig halten kann? Notiere deine Rechnung.

4 *Informationen in der Aufgabe*

Bei der Aufgabenkonstruktion bestehen vielfältige Möglichkeiten, Hinweise in die Aufgabe einzubauen, die entweder – bewusst oder unbewusst – das Lösen der Aufgabe erschweren oder erleichtern. Gängige Arten, mit Informationen in Aufgaben umzugehen, sind etwa,

– zusätzliche, für die Lösung der Aufgabe nicht wirklich erforderliche, aber aussagekräftige Informationen einzufügen,

– umgekehrt, in der Aufgabe vielfältige nicht gebrauchte Informationen zu bringen und damit vom zu lösenden Problem abzulenken,

– sog. „Schlüsselwörter" zu verwenden, die auf bestimmte Lösungsverfahren hindeuten.

Ein beliebtes – aber eben nicht immer sinnvolles – Vorgehen, um eine Aufgabe zu erschweren ist es, zusätzliche Informationen einzustreuen. Ein auffälliges Beispiel dieser Art ist eine Aufgabe aus den Vergleichsarbeiten 2009 für die Jahrgangsstufe 6 an bayerischen Hauptschulen. Für das Lehrplanthema Grundrechenarten wird diese Aufgabe gestellt (ISB, 2009):

„Aufzugtür"
An einer Aufzugtür hängt dieses Schild:

Familie Müller steht vor dem Aufzug. Der Vater ist 45 Jahre alt und wiegt 96 kg, Frau Müller muss um 14:00 Uhr beim Arzt sein. Sie hat ein Gewicht von 74 kg. Tochter Sabine hat zwar in den letzten 3 Wochen 4 kg abgenommen, bringt aber immer noch 58 kg auf die Waage. Ihr 2 Jahre jüngerer Bruder ist ca. 8 cm kleiner als seine Schwester, aber genauso schwer.

Berechne und begründe, ob die Familie zusammen in dem Aufzug fahren kann.

Die Verwendung von Informationen in realitätsorientierten Aufgaben hat einen Doppelcharakter. Einerseits sind „reale" Situationen stets mit mehr Information ausgestattet, als für eine mathematische Bearbeitung unbedingt nötig ist. Das Mathematisieren unter redundanter Information ist also ein typischer Fall. Umgekehrt ist auch das das Beschaffen nicht genannter Informationen ein typisches Kennzeichen realer Aufgaben.

Im Bestand der NRW-Aufgaben aus den zentralen Prüfungen 2008 sind keine derartig auffälligen Beispiele redundanter Information enthalten. Allenfalls kommt vor, dass für eine spezifische Teilaufgabe nur einige der im Stamm der Aufgabe vorliegenden Informationen gebraucht werden. Ein Beispiel ist die o.g. Aufgabe HSA-3e: Für die Berechnung des Pyramidenvolumens benötigt man nicht mehr die Angabe, dass die Höhe der Seitenflächen 6 cm beträgt. Wirkliche Beschaffung von externer Information verbietet sich schon allein deshalb, weil es sich um Prüfungsaufgaben mit beschränkten Möglichkeiten des Recherchierens handelt. Diese Situation setzt einer allzu großen Offenheit Grenzen.

3.2.3 Der formale Problemlösecharakter der Aufgaben

Die Lösungsprozesse von Aufgaben werden bereits in der Aufgabenstellung dadurch beeinflusst, in welcher Weise die Aufgabe als „Problem“ formuliert und dargeboten wird. Mit mehreren Merkmalen kann dieser Aspekt beschrieben werden. Wir beginnen mit dem Format der Aufgabe. Es folgt eine allgemeine Übersicht über den formalen Problemlösecharakter der Aufgaben, der seinerseits nicht unabhängig ist vom vorgegebenen Antwortformat.

1 Format der Aufgabe: Ausführliche oder kurze Antwort, multiple choice

Mathematische Aufgaben können in unterschiedlichen Formaten gestellt werden. Üblicherweise werden Fragen gestellt, die Zahlen, Figuren, Entscheidungen, etc. zur Lösung haben. Je nachdem, ob nur eine kurze Antwort (eine Zahl allein oder das Eintragen eines Wertes in eine vorgelegte Tabelle) oder ein längerer zusammenhängender Text bzw. eine voll ausgeführte Rechnung verlangt wird, kennzeichnen wir die Aufgabe mit „kurze Antwort“ bzw. „ausführliche Antwort“. „Ausführliche Antworten “ sind in der ZP-10 meist an einer Zusatzbemerkung zu erkennen: „Notiere Deine Rechnung!“. In jüngerer Zeit werden in mathematischen Prüfungen – vermutlich ausgelöst durch internationale Vergleichsuntersuchungen – zunehmend auch Aufgaben im multiple-choice-Format gestellt. Wirklich in einem strengen Sinne „offene“ Aufgaben, bei denen also auch noch die Fragestellung selbst aus der Aufgabe erschlossen werden soll, erscheinen für Abschlussarbeiten wenig geeignet, weil bei solchen Prüfungen die Bewertungen vergleichbar sein sollen. In der Tat kommen im gesamten hier untersuchten Aufgabenbestand der ZP-10 keine solchen „offenen“ Aufgaben vor. Im Gegenteil, gerade bei zentralen Prüfungen werden sehr konkrete Anweisungen gegeben, wie man im übernächsten Abschnitt erkennt.

Das Format ist keineswegs nur ein äußeres Kriterium für eine Aufgabe. Es beeinflusst auch die während der Aufgabenlösung zu aktivierenden Lösungsstrategien. Bei multiple-choice-Aufgaben kommt man ggf. auch mit einer Ausschlussstrategie zur Lösung. Längere Antworten oder vollständige Rechnungen erfordern die Darlegung eines in sich schlüssigen Gedankengangs, also mehr als nur ein Ergebnis, während bei „kurzen“ Aufgaben innerhalb des Lösungsprozesses auch Sprünge möglich sind, die dann nicht auffallen, wenn sie das Ergebnis nicht beeinflussen.

Die Verteilung der Aufgaben auf diese Formate ergibt sich aus den Randsummen in der im folgenden Abschnitt gezeigten Tab. 3-14. In der überwiegenden Zahl verlässt sich die ZP-10 auf das „klassische“ Format der Darstellung des gesamten Lösungsweges, also auf den hier mit „ausführliche Antwort“ gekennzeichneten Typus: HSA: 21 Aufgaben; MSA: 15 Aufgaben; MSA-Gy: 16 Aufgaben.

2 Aufgabentypen in Hinblick auf die formale Problemstruktur

Aufgaben kann man formal und allgemein als „Probleme“ im psychologischen Sinn (vgl. z.B. Dörner 1979) auffassen. Ihre Lösung beinhaltet dann, sich mit einem Triplett aus gegebenem Ausgangszustand, zu findendem bzw. zu beschreitendem Lösungsweg und gesuchtem bzw. erwünschtem Zielzustand auseinanderzusetzen (Bruder, 1988, 2000; J. Neubrand, 2002; Büchter & Leuders, 2005). Je nach Vorgabe und Vorhandensein der einzelnen Komponenten dieses Tripletts entstehen Aufgaben mit unterschiedlichen formalen Problemlösestrukturen. Diese verschiedenen Möglichkeiten fassen wir zu Aufgabentypen zusammen. Man kann dabei nach diesen Problemlösetypen unterscheiden, wobei i.a. eine Zuordnung zu bekannten mathematikdidaktischen Bezeichnungen von Aufgaben (hier wiedergegeben nach J. Neubrand (2002); vgl. Bruder, 1988) besteht. Wie im Folgenden gezeigt wird, kann man aber diese Zuordnung nicht ohne weitere Überlegungen vornehmen.

– Ausgangszustand vorgegeben	*Bestimmungsaufgabe*
– Ausgangszustand und Lösungsweg vorgegeben	*Grundaufgabe*
– Zielzustand vorgegeben	*Umkehraufgabe*
– Zielzustand und Lösungsweg vorgegeben	*Umkehraufgabe*
– Ausgangszustand und Zielzustand vorgegeben	*Aufgabe mit vorgegebenem Endergebnis* oder *Beweis-/Begründungsaufgabe*
– Lösungsweg vorgegeben	*selbst eine Aufgabe finden*
– Ausgangszustand, Zielzustand und Lösungsweg vorgegeben	*„Aufgabe über Aufgaben“*

Völlig offene Problemsituationen, in denen sowohl Ausgangszustand, Zielzustand wie Lösungsweg gesucht sind, beispielsweise die sog. Fermi-Aufgaben (Wie viele Klavierstimmer gibt es in New York?), müssen hier bei der Analyse der ZP-10 nicht berücksichtigt werden; sie kommen hier nicht vor und scheinen für zentrale Prüfungen auch nur bedingt geeignet.

Die Problemlösetypen haben für das Lernen von Mathematik dadurch Bedeutung, dass je nach Typ unterschiedliche Strategien zu aktivieren sind. Bestimmungsaufgaben und Grundaufgaben sind der am weitesten verbreiteten Typen, sozusagen der Standard für mathematische Aufgaben. Der bekannteste unter den Nicht-Standardtypen ist die sog. Umkehraufgabe, bei der Ausgangszustand aus dem Zielzustand rückerschlossen werden muss, wobei der Weg bekannt sein kann oder nicht. Es ist jedoch zu beachten, dass Ausgangspunkt und Ziel hier unter mathematikdidaktischen Gesichtspunkten bestimmt werden müssen. Das kann gegenläufig zu einer rein kognitionspsychologischen Betrachtungsweise sein. Denn „bei der mathematischen Begriffsbildung wird meist eine Richtung des mathematischen Denkens ausgezeichnet: „Der Kreis *hat* einen Umfang“ und nicht „Zu diesem Umfang gehört ein Kreis“; „Das Volumen *des* Quaders“ und nicht „Ein Quader mit diesem Volumen“; „Bestimme die Lösung *dieser* Gleichung“ und nicht „Suche eine Gleichung mit dieser Lösung“. Daher können die Richtungen des Lösungsprozesses und des mathematischen Lösungsverfahrens gegenläufig sein“ (J. Neubrand, 2002, S. 125). Die Aufgaben HSA-4b2, HSA-4d1 und HSA-4d2 können so eingestuft werden.

Allerdings ist auf eine zusätzliche Abhängigkeit vom Format der Aufgabe zu achten. Bei multipe-choice-Aufgaben sind Ausgangszustand und Zielzustand ja zwangsläufig vorgegeben. Die „multiple choice“ verlangt, dass aufgezeigt wird, welcher Lösungsweg gangbar ist, welcher nicht. Die Aufgabe muss aber deswegen nicht notwendig eine Begründungs- oder gar Beweisaufgabe sein. Oft genügen einfache Rechnungen wie bei Bestimmungsaufgaben im Hintergrund. Dies wird besonders deutlich an den folgenden drei Aufgaben aus der MSA-Prüfung (Aufgaben a und b nur in MSA, Aufgabe c befindet sich auch in der MSA-Gy-Prüfung):

MSA-3a), b), c) - „Fehler von Sportlern“

In Untersuchungen mit Sportlern wurden Schätzwerte für Fehlerwahrscheinlichkeiten in unterschiedlichen Situationen ermittelt. Ziel war es, mögliche Fehler durch zielgerichtetes Training weitgehend auszuschließen.

	Situation	Fehlerwahr-scheinlichkeit
A	Einfache und häufig durchgeführte Aufgabe	0,001
B	oft geübte Aufgabe unter Zeitdruck	0,01
C	schwierige Aufgabe	0,1
D	schwierige Aufgabe unter Stress	0,3

a) In welcher der beschriebenen Situationen tritt die Fehlerwahrscheinlichkeit $1\cdot 10^{-2}$ auf? Notiere den zugehörigen Buchstaben in deinen Unterlagen.

b) Ein Basketballspieler hat im Training eine Trefferquote von 90 % bei Freiwürfen. Welcher der Situationen entspricht dies? Notiere den zugehörigen Buchstaben in deinen Unterlagen.

c) Schwierige Aufgaben unter Stress werden von Sportlern mit einer Fehlerwahrscheinlichkeit von 0,3 ausgeführt. Beurteile, ob die folgenden Aussagen stimmen. Kreuze an.

Das bedeutet, dass	stimmt	stimmt nicht
es in **etwa** 30 % der Fälle zu einem Fehler kommt.		
die Fehlerwahrscheinlichkeit $3 \cdot 10^{-1}$ beträgt.		
30 Fehler gemacht werden.		
in 3 von 10 Fällen **sicher** ein Fehler auftritt.		

Bei allen diesen Aufgaben ist das multiple-choice-Format anzutreffen, wenngleich bei b) und c) in etwas ungewöhnlicher Form. Jedes Mal ist deshalb Ausgangszustand (eine gewisse Zahl) und Zielzustand (eine andere Zahl, in die umzurechnen ist, oder eine Aussage, die zu interpretieren ist) mit angegeben. Dennoch ist keine der Aufgaben eine Begründungsaufgabe in dem Sinne, dass ein logischer Zusammenhang herzustellen ist. Solche Effekte sind bei der Interpretation der Daten zu berücksichtigen. Die Tab. 3-14 zeigt daher gleichzeitig Antwortformate und Problemlösetypen der ZP-10-Aufgaben.

Tabelle 3 – 14. Problemlösetypen und Antwortformate (nach den Prüfungsvarianten HSA, MSA und MSA-Gy):

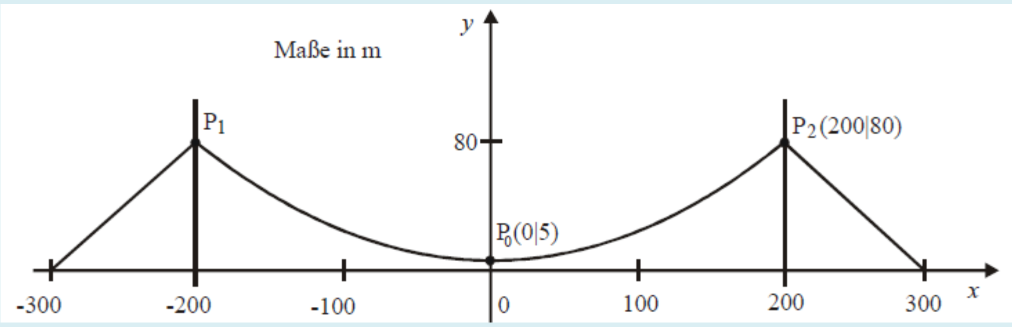
		ausführliche Antwort	kurze Antwort	Multiple Choice	gesamt
HSA	Ausgangszustand gegeben	15	2	2	17
	Ausgangs- und Zielzustand gegeben	3	0	3	6
	Zielzustand gegeben	3	0	3	3
	gesamt	21	2	3	26
MSA	Ausgangszustand vorgegeben	11	4	0	15
	Zielzustand gegeben	1	0	0	1
	Ausgangszustand und Lösungsweg gegeben	2	1	0	3
	Ausgangs- und Zielzustand gegeben	1	0	8	9
	gesamt	15	5	8	28
MSA-Gy	Ausgangszustand vorgegeben	11	1	0	15
	Zielzustand gegeben	1	0	0	1
	Ausgangszustand und Lösungsweg gegeben	2	1	0	3
	Ausgangs- und Zielzustand gegeben	2	0	6	8
	gesamt	16	2	6	24

Die Tabelle zeigt zunächst, dass 4 der 7 genannten Problemlösetypen vorkommen. Es dominieren die Bestimmungsaufgaben im üblichen Sinne.

In der MSA- und der MSA-Gy-Prüfung kann man als Umkehraufgabe allein die schon mehrfach zitierte Aufgabe über die Schrittmaßregel bei Treppen ansprechen. Bei der Kategorie der Begründungsaufgaben muss man – wie beschrieben – die multiple choice-Aufgaben herausnehmen, so dass man im MSA nur auf eine und MSA-Gy-Bereich auf zwei „echte“ Begründungsaufgaben kommt. Die den beiden Test-Varianten gemeinsame Aufgabe ist diese:

MSA-4d2) und MAS-Gy-4a2) - „Hängebrücken“

Der Verlauf des Stahlseils zwischen den Brückenpfeilern kann annähernd durch eine Parabel beschrieben werden.



Eine der folgenden Funktionsgleichungen gehört zu der Parabel, die den Verlauf des Stahlseils beschreibt.

$y = -\,0{,}001875 \cdot x^2 + 5$ $y = 0{,}001875 \cdot x^2 + 5$ $y = 0{,}001875 \cdot x^2 - 5$

d2) Erkläre, warum die beiden anderen Funktionsgleichungen die Parabel nicht beschreiben.

In der HSA-Prüfung finden wir 3 Aufgaben, bei denen ein Zielzustand angegeben ist, und zwar die schon erwähnten Aufgaben HSA-4b2 und HSA-4d1,2. Die Aufgaben mit angegebenem Ausgangs- und Zielzustand sind einmal vom Typ, dass eine rechnerische Bestätigung eines vorgelegten Ergebnisses verlangt wird (HSA-3d), und zweimal handelt es sich um Begründungen, die allerdings auf rechnerische Überlegungen zurückgreifen. Weder in der HSA- noch in der MSA- bzw. MSA-Gy-Prüfung kommen Begründungsaufgaben vor, die die Darstellung einer logischen Argumentation fordern. Insgesamt gesehen kann man aber von einer durchaus akzeptablen Breit in den Problemlöseformaten der Aufgaben der ZP-10 sprechen.

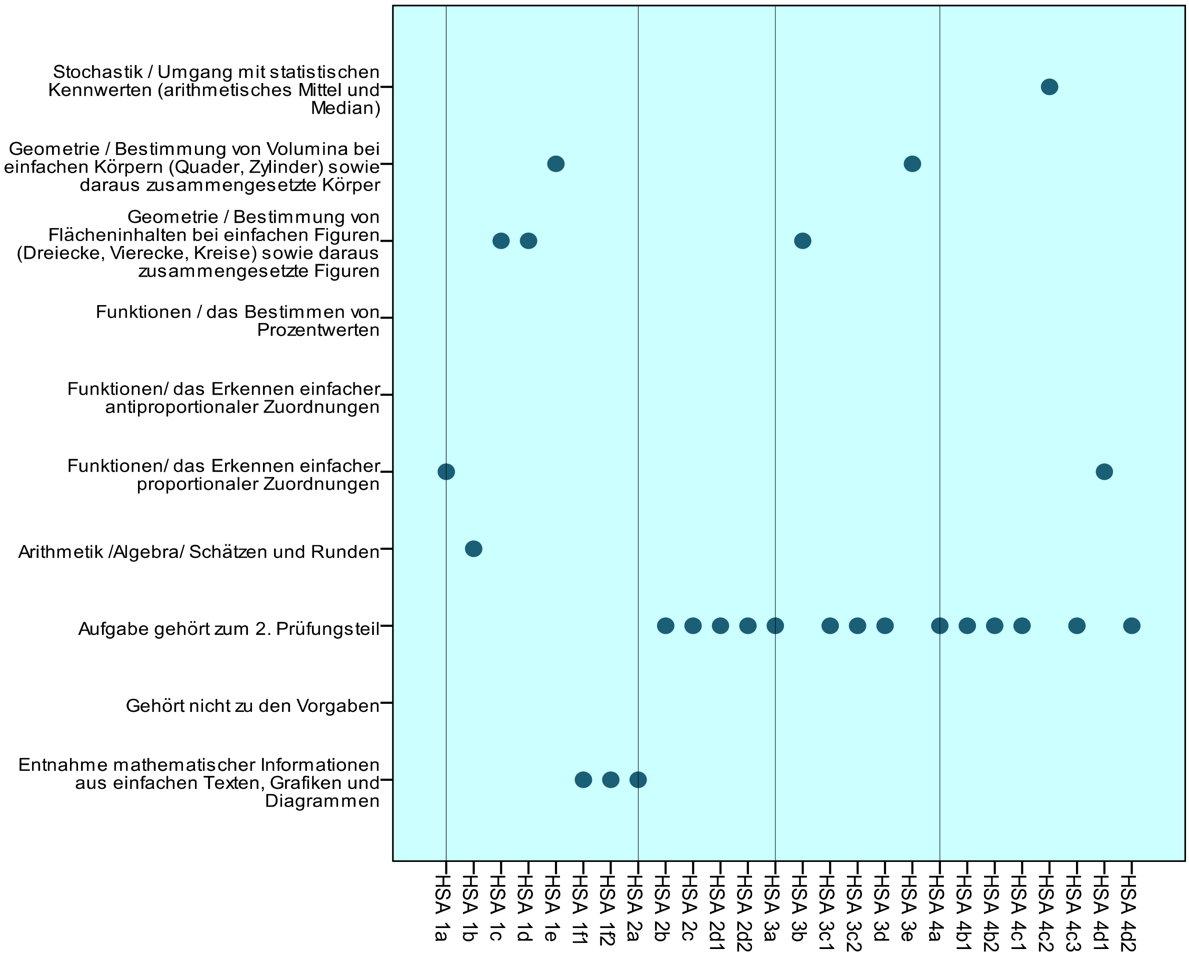
3.2.4 Mathematisches Modell und seine Verarbeitung: Angesprochene mathematische Inhalte

Zur Bewertung der Phase „Verarbeiten des mathematischen Modells" nach Abb. 3 sind unterschiedliche inhaltliche Aspekte zu beachten. Einerseits gibt es bei einer schulischen Prüfung stets curriculare Rahmenbedingungen, die – in aufsteigender Reihenfolge von speziellen Vorgaben zu einem allgemeinen Rahmen – durch die speziellen Prüfungs-„Vorgaben" in NRW, durch die landespezifischen Kerncurricula und schließlich durch einen Einordnung in eine landesunabhängige Liste charakteristischer Stoffgebiete der Sekundarstufe I beschrieben werden können. Die Beachtung der stofflichen Rahmen in den zentralen Prüfungen ist nicht nur eine sozusagen protokollierende Aufgabe dieses Berichts. Vielmehr hängt an der stofflichen Breite, die in den zentralen Prüfungen realisiert ist, die inhaltliche Aussagekraft der Prüfungsergebnisse. Anzustreben ist eine hinreichende Vielfalt der Aufgaben über das gesamte Spektrum mathematischer Inhalte der Sekundarstufe I.

Die den Lehrerinnen und Lehrern der beteiligten 10. Klassen seitens des Ministeriums für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen mitgeteilten offiziellen „Vorgaben" sind die erste Orientierung für die Breite des stofflichen Anspruchs der zentralen Prüfungen. Wir differenzieren wie das Ministerium nach den Vorgaben für den ersten („Basiskompetenzen"; vgl. 2.1.2) und den zweiten („komplexere Aufgaben") Prüfungsteil. Die Vorgaben werden für jede Prüfungsvariante (HSA, MSA, MSA-Gy) jeweils getrennt für den ersten und zweiten Prüfungsteil dargestellt.

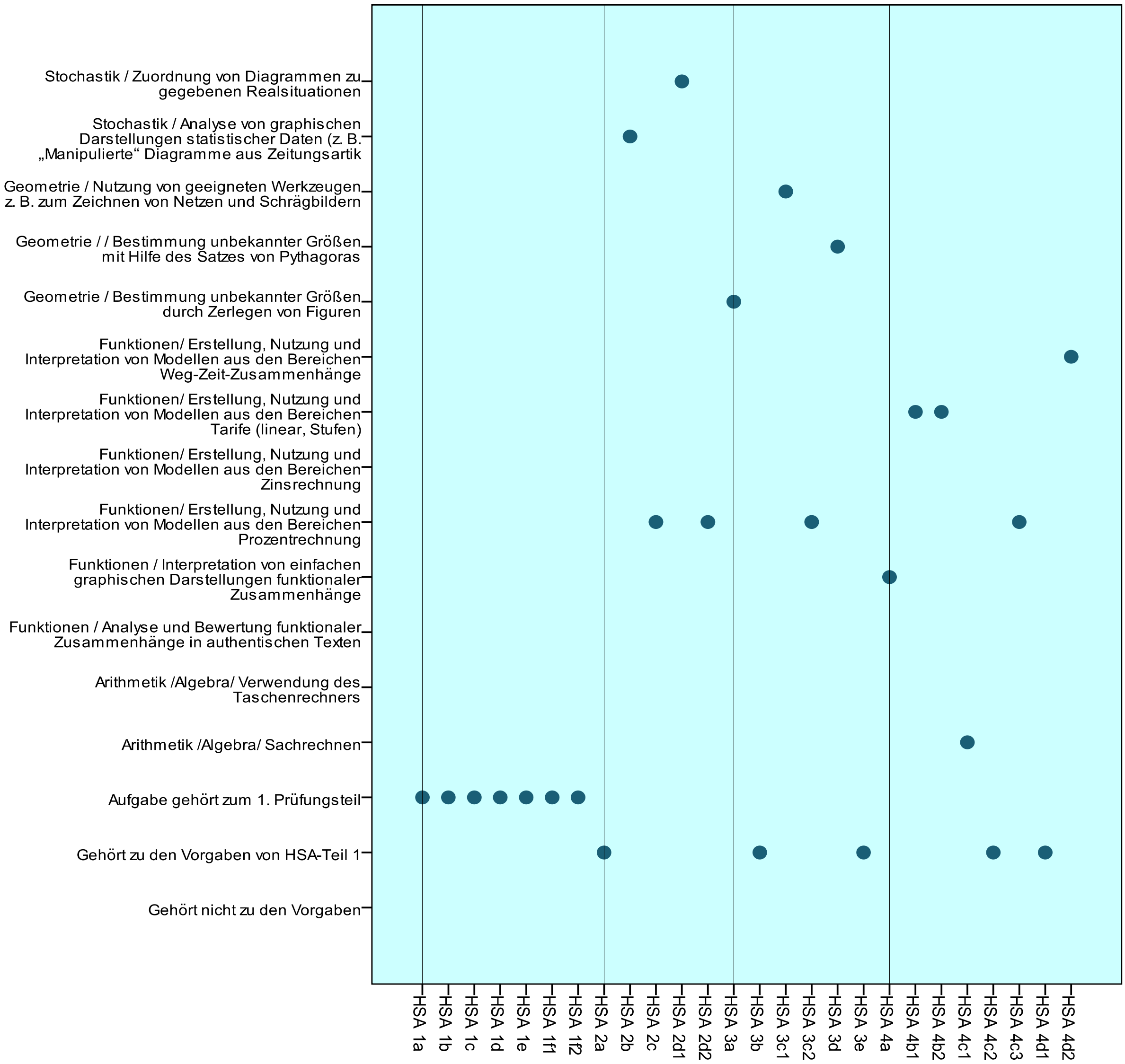
1 *Vorgaben HSA*

Abbildung 3 – 15. Verteilung der Aufgaben auf die „Vorgaben“ des Ministeriums zum 1. Prüfungsteil – HSA:



Offenbar sind die vom Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen selbst gegebenen Vorgaben im ersten Prüfungsteil gut gestreut umgesetzt. Einfache Prozentaufgaben fehlen, ebenso das Erkennen einfacher antiproportionaler Zusammenhänge. Umgekehrt schließen sich gelegentlich Aufgaben aus dem zweiten Teil sich an die Vorgaben zu den Basiskompetenzen an. Insgesamt kann man also von einer ausgewogenen Verteilung sprechen.

Abbildung 3 – 16. Verteilung der Aufgaben auf die „Vorgaben“ des Ministeriums zum 2. Prüfungsteil – HSA:

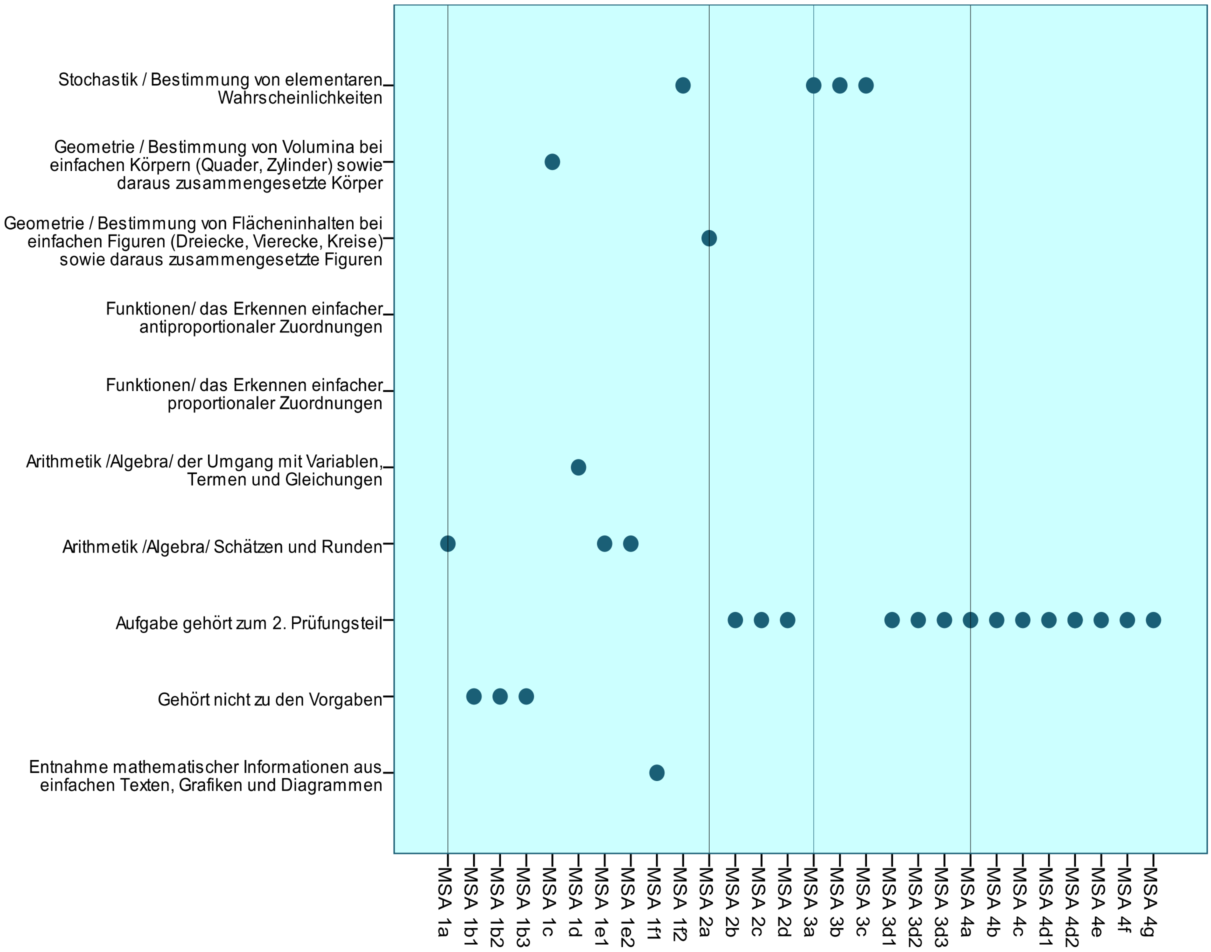


Auch einige „komplexere“ Aufgaben des zweiten Prüfungsteils greifen auf die Vorgaben aus Teil 1 zurück (Einordnung siehe Abb. 3-15). Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra mit Gebrauch des Taschenrechners sind in der Tabelle nicht aufgeführt, denn der Taschenrechnergebrauch ist durchgehend möglich und die Tabelle zeigt nur die unter den Vorgaben dominierende Einordnung.

Die Zuordnung stößt manchmal an die Grenzen des gewöhnlichen Sprachgebrauchs. Z.B. ist nur eine – eindeutig arithmetische – Aufgabe unter Sachrechnen verzeichnet, weil Aufgaben mit funktionalen Aspekten in den NRW-Vorgaben in andere Felder (zu „Funktionen“) eingeordnet sind Zu einem umfassenden Begriff von „Sachrechen“, wie ihn etwa Winter (1985) aufmacht, gehören natürlich auch solche Aufgaben.

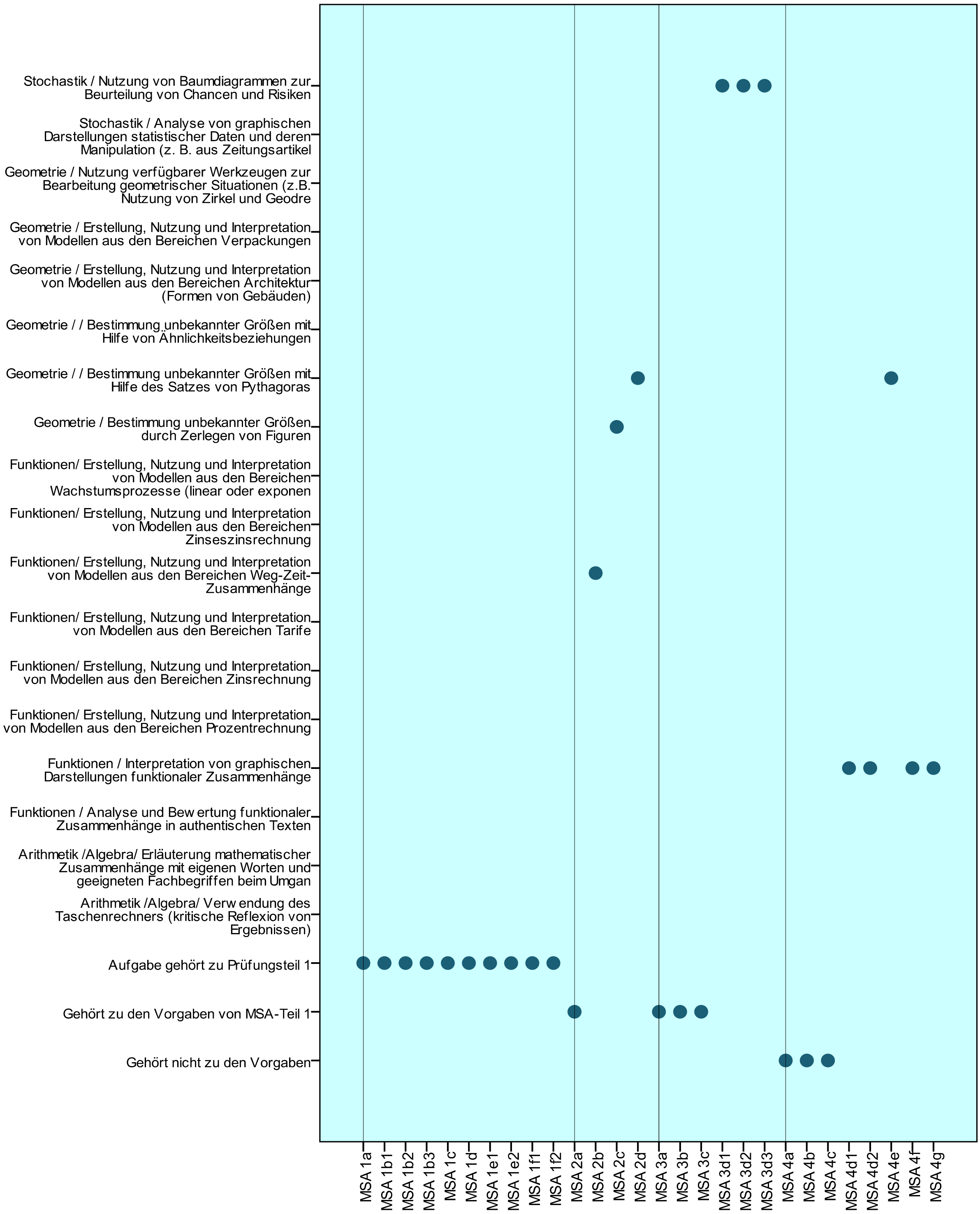
2 *Vorgaben MSA*

Abbildung 3 – 17. Verteilung der Aufgaben auf die „Vorgaben“ des Ministeriums zum 1. Prüfungsteil – MSA:



Auch hier streuen die Aufgaben gut über die Vorgaben. Die Aufgabe zu den Quadernetzen entspricht nicht den Vorgaben. Die Aufgaben MSA-3b und 3c aus dem 2. Prüfungsteil kann man auch den elementaren stochastischen Aufgaben zurechnen, die bereits Prüfungsteil 1 fordert. Die Aufgabe MSA-2a könnte man alternativ auch dem 1. Prüfungsteil zugerechnen.

Abbildung 3 – 18. Verteilung der Aufgaben auf die „Vorgaben“ des Ministeriums zum 2. Prüfungsteil – MSA:



Nun tritt vor allem der Mangel an geometrischen Themen deutlich hervor, sieht man von Längenbestimmungen nach Pythagoras und dem Erkennen zusammengesetzter Figuren (Aufgabe 2) ab. Auch Funktionen kommen nicht in der in den Vorgaben tendenziell überbetonten kovariaten Sichtweise vor, sondern in der „Brücken“-Aufgabe (Aufgabe 4) als Beschreibung statischer Gegebenheiten.

3 Vorgaben MSA-Gy

Die Vorgaben zum ersten Prüfungsteil sind identisch zur Prüfungsvariante MSA. Dennoch ist interessant zu sehen, ob sich der etwas veränderte Aufgabensatz im 2. Prüfungsteil anders in diese Vorgaben einfügt. Tatsächlich ist von den elementaren stochastischen Aufgaben noch eine im zweiten Prüfungsteil vorhanden.

Abbildung 3 – 19. Verteilung der Aufgaben auf die „Vorgaben" des Ministeriums zum 1. Prüfungsteil – MSA-Gy:

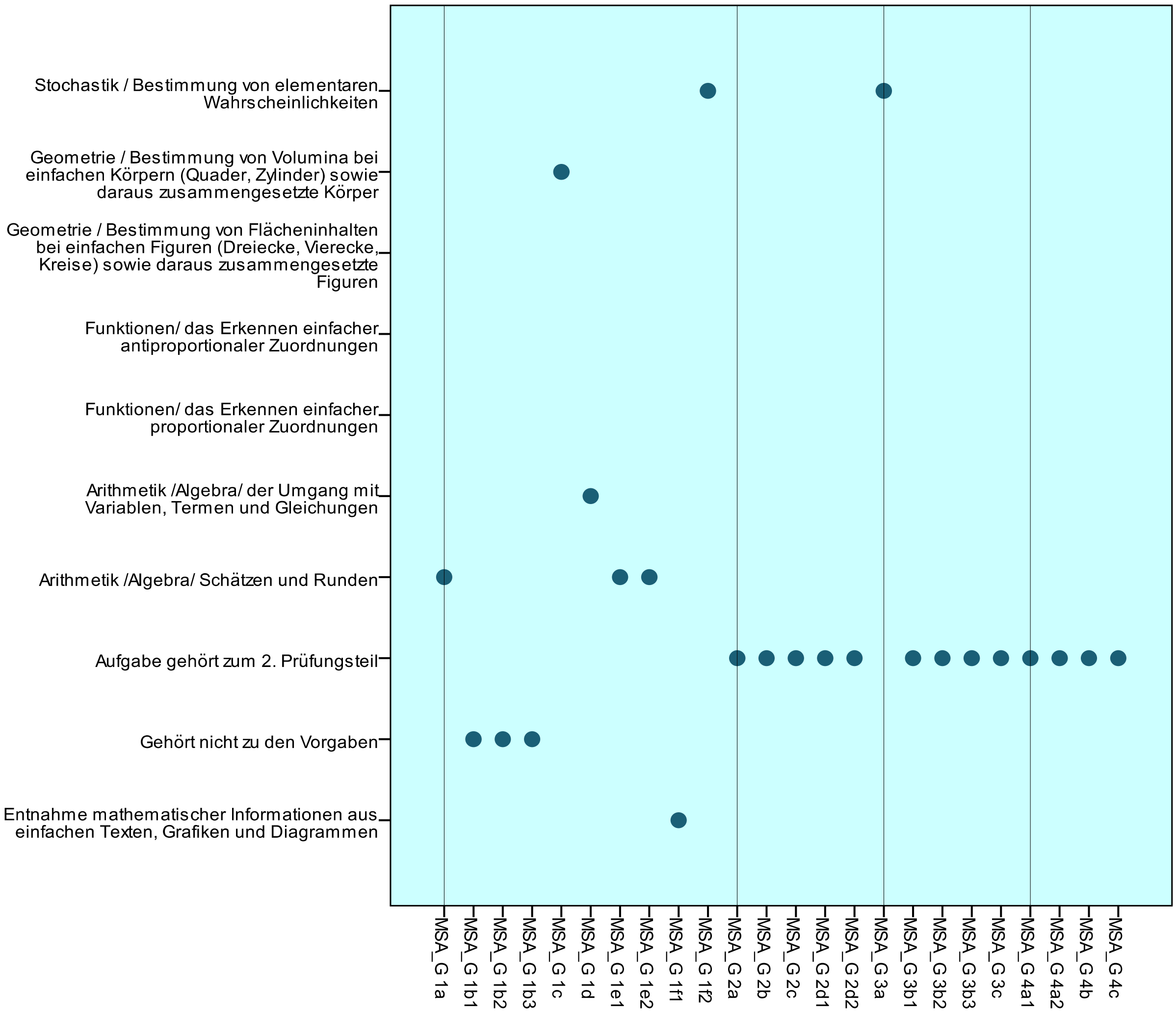
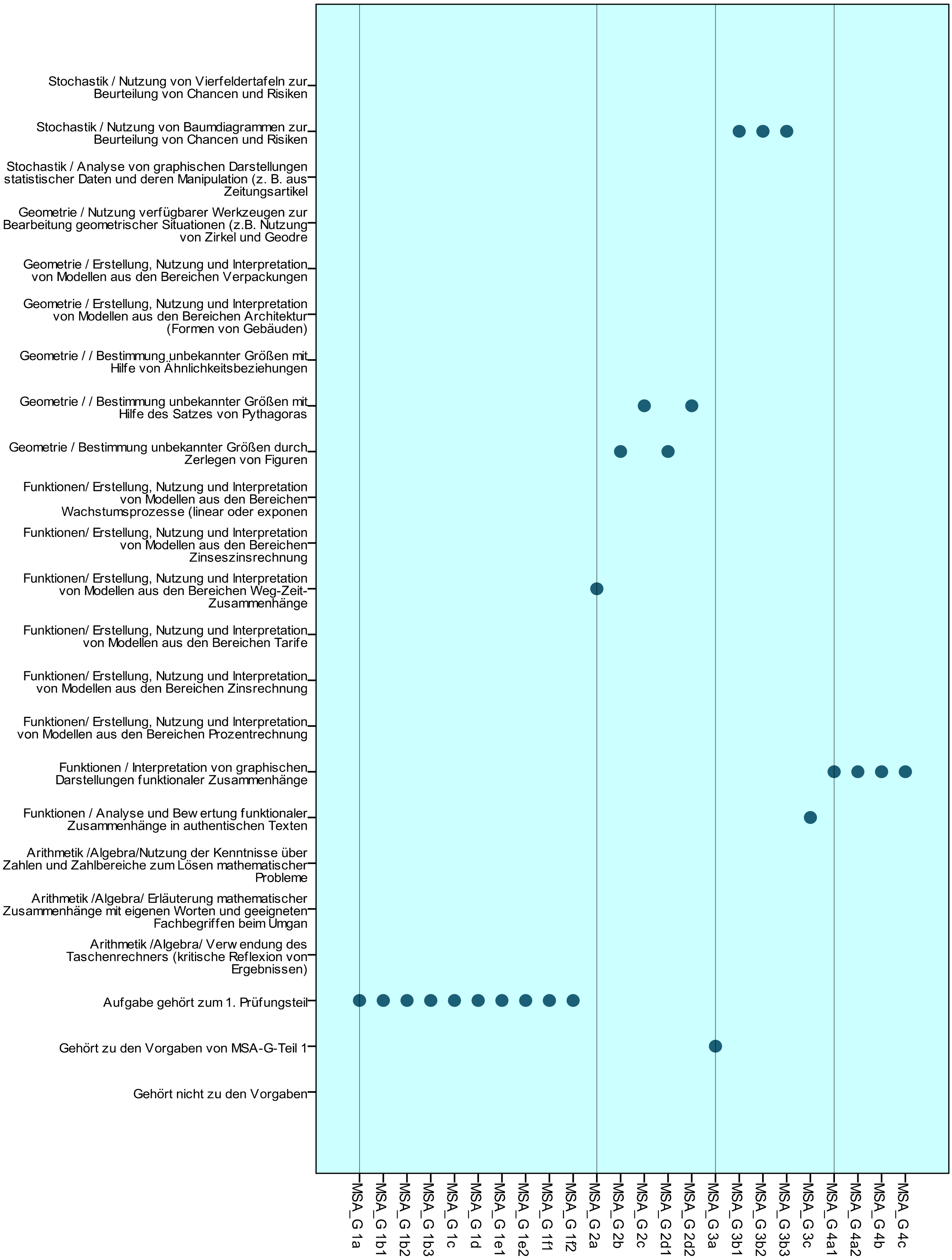


Abbildung 3 – 20. Verteilung der Aufgaben auf die „Vorgaben“ des Ministeriums zum 2. Prüfungsteil – MSA-Gy:



Nun erkennt man, dass sich die Aufgaben auf wenige Vorgaben konzentrieren. Es werden wie in der MSA-Prüfung nur wenige geometrische Kompetenzen gefordert. Es fehlen ebenso auch Teile aus der Algebra, insbesondere wenn es um die Nutzung von Zahlen und Zahlbereichen (und damit formale Gleichungen) zum Lösen mathematischer Probleme und um die kritische Reflexion von Taschenrechnerergebnissen geht. Dies wird noch spezifischer sichtbar, wenn die aufgerufenen Stoffgebiete aus noch allgemeinerer Sicht betrachtet werden. Dies geschieht im nächsten Abschnitt.

4 Allgemeine Zuordnung zu Stoffgebieten der Sekundarstufe I

Um einen allgemeineren Eindruck von der inhaltlichen Breite der NRW-zentralen Prüfungen von 2008 zu erhalten, legen wir mehrere Schemata zugrunde:

– eine „klassische" zusammenfassende Einteilung der Stoffgebiete der Sekundarstufe I,

– einen detaillierten Stoffkatalog, der bewusst wird auf eine kompetenzorientierte Darstellung verzichtet, um die Inhalte direkt ansprechen zu können, sowie

– die inhaltlichen Kompetenz-Anforderungen, die die Kerncurricula in Nordrhein-Westfalen für das Ende der Sekundarstufe I fordern.

Um eine grobe Übersicht zu gewinnen, werden die Stoffgebiete der Aufgaben zunächst nach den „klassischen" Gebieten der Mathematik in der Sekundarstufe I zusammengefasst.

Tabelle 3 – 21. Mathematische Stoffgebiete der Aufgaben - klassische Einteilung:

Mathematische Stoffgebiete (in Anzahl (%))	HSA	MSA	MSA-Gy
Arithmetik	13 (50,0 %)	5 (17,9%)	4 (16,7 %)
(formale) Algebra	0	0	0
Funktionen	1 (3,8%)	5 (17,9%)	6 (25,0%)
Geometrie	8 (30,8%)	11 (39,3%)	8 (33,3%)
Stochastik	4 (15,4%)	7 (25,0%)	6 (25,0%)
gesamt	**26**	**28**	**24**

Aufgaben aus dem Bereich der formalen Algebra (gegebenen Term vereinfachen, gegebene Gleichung lösen) kommen nicht vor. Gleichungen und Terme spielen in der ZP-10 nur dann eine Rolle, wenn sie im Zusammenhang mit Funktionen vorkommen, und hier, wie oben gezeigt, weniger in unter der Vorstellung „Kovariation" als zu Zwecken der statischen Beschreibung eines Kurvenverlaufs.

Wie die Aufgaben der ZP-10 mit den inhaltlichen Kompetenz-Anforderungen aus den Kerncurricula in Nordrhein-Westfalen für das Ende der Sekundarstufe I (hier dargestellt nur für Gesamtschule/Erweiterungskurs, Realschule und Gymnasium[29]) korrespondieren zeigt die folgende Tabelle. Dabei ist nur die jeweils vorrangige Zuordnung vorgenommen; verschiedene Aufgaben erlauben naturgemäß auch eine zweite Zuordnung zu den Kompetenz-Anforderungen.

[29] Es gibt nur marginale Änderungen zwischen den Schulformen.

Tabelle 3 – 22. Kerncurricula Nordrhein-Westfalen: Inhaltliche Kompetenzen nach Sekundarstufe I (Mittlerer Schulabschluss) in Aufgaben aus MSA und MSA-Gy:

		MSA	MSA-Gy
A	**Arithmetik / Algebra**		
1	Schülerinnen und Schüler besitzen einen Begriff von Zahlen, Größen und ihren Darstellungen, operieren sicher mit ihnen und verwenden die Symbolsprache der Mathematik sachgerecht.	0	0
2	Sie verwenden Zahlen je nach Situation in unterschiedlichen Darstellungsformen (als Bruch, Dezimalzahl; Prozentzahl und in Zehnerpotenzschreibweise), ordnen und vergleichen sie.	1	0
3	Sie rechnen mit rationalen und irrationalen Zahlen, nutzen Rechengesetze und systematisches Zählen.	0	0
4	Sie arbeiten in Anwendungszusammenhängen sachgerecht mit Zahlen, Größen und Variablen und führen Schätzungen und Näherungsrechnungen durch.	6	3
5	Sie lösen lineare Gleichungen und Gleichungssysteme, quadratische und einfache exponentielle Gleichungen rechnerisch, grafisch oder durch Probieren.	3	3
F	**Funktionen**		
1	Schülerinnen und Schüler besitzen ein grundlegendes Verständnis von funktionaler Abhängigkeit und nutzen ihre Kenntnisse zum Erfassen und Beschreiben von Beziehungen und Veränderungen in Mathematik und Umwelt.	0	0
2	Sie stellen funktionale Zusammenhänge, insbesondere lineare und quadratische, exponentielle Funktionen, Sinusfunktionen, in sprachlicher Form, in Tabellen, als Grafen und in Termen dar und interpretieren sie situationsgerecht..	2	3
3	Sie identifizieren proportionale und antiproportionale Zuordnungen, wenden Dreisatz, Prozentrechnung und Zinsrechnung an und rechnen mit Maßstäben.	1	2
4	Sie grenzen lineares und quadratisches Wachstum an Beispielen voneinander ab.	0	0
G	**Geometrie**		
1	Schülerinnen und Schüler erfassen Formen der Ebene und des Raumes und ihre Beziehungen in mathematischen Zusammenhängen sowie in der beobachteten Wirklichkeit und charakterisieren sie anhand ihrer grundlegenden Eigenschaften.	0	0
2	Sie beschreiben ebene Figuren (Vielecke, Kreise) und Körper (Prismen, Zylinder, Kugeln, Kegel, Pyramiden), Lagebeziehungen und grundlegende Symmetrien mit angemessenen Fachbegriffen und identifizieren sie in ihrer Umwelt.	0	0
3	Sie zeichnen und konstruieren ebene geometrische Figuren (auch im Koordinatensystem), skizzieren Schrägbilder, entwerfen Netze von Körpern und stellen Körpermodelle her.	3	3
4	Sie schätzen und bestimmen Winkel, Längen, Flächeninhalte, Oberflächen und Volumina.	3	2
5	Sie berechnen Größen und begründen Eigenschaften von Figuren mit Hilfe von Symmetrie, einfachen Winkelsätzen, Kongruenz, Ähnlichkeit, trigonometrischen Beziehungen, dem Satz des Thales und dem Satz des Pythagoras.	2	2
S	**Stochastik**		
1	Schülerinnen und Schüler erheben statistische Daten und werten sie aus. Sie beschreiben und beurteilen zufällige Ereignisse mit mathematischen Mitteln.	0	0
2	Sie planen statistische Erhebungen, nutzen Methoden der Erfassung und Darstellung von Daten (Säulen- u. Kreisdiagramm, Boxplot) und bewerten Darstellungen kritisch.	0	0
3	Sie bestimmen relative Häufigkeiten, Mittelwerte (arithmetisches Mittel, Median) und Streumaße (Spannweite, Quartil) und interpretieren diese.	1	1
4	Sie bestimmen Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe von Laplace-Regel, Baumdiagrammen und Pfadregeln, nutzen Häufigkeiten zum Schätzen von Wahrscheinlichkeiten und Wahrscheinlichkeiten zur Vorhersage von Häufigkeiten.	6	5

Man erkennt nun bereits einige charakteristische Lücken, d.h. Kompetenz-Anforderungen, die nicht durch Aufgaben abgedeckt sind. In jeder Prüfung müssen schon aus Zeitgründen solche Lücken auftreten. Hier gehen sie zudem auf die vom Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen gemachten Vorgaben zurück. Die belegten Kompetenz-Anforderungen entsprechen recht genau den Vorgaben (s.o.). Es zeigt sich wieder das Fehlen einerseits der auf mathematisch Beschreibung und Durchdringung ausgerichteten Kompetenzen in der Geometrie und anderseits der kovariaten Funktionsauffassung.

Um an die inhaltliche Breite der ZP-10 heranzukommen, ist eine genauere Identifizierung nötig, die *nur* für die MSA-Prüfung in Tab. 3-24 erfolgen wird. Dazu legen wir einen detaillierteren Stoffkatalog zugrunde. Dieser wurde in ähnlicher Form bereits bei der

Überprüfung der curricularen Validität der TIMSS-Aufgaben benutzt (Baumert & al., 1997; J. Neubrand & M. Neubrand, 1998; J. Neubrand, 2002, Manual). Es ist von uns hier geringfügig erweitert worden, um einige spezielle zusätzliche Aspekte zu erfassen. Dieses Schema ist in wechselnden Varianten immer wieder zur Einschätzung der curricularen Validität von Vergleichstests benutzt worden. Es umreißt gewissermaßen einen maximalen Stoffkatalog für Mathematik in der Sekundarstufe I.

Tabelle 3 – 23. Stoffgebiete der Sekundarstufe I detailliert:

1	**Grundrechenarten (Zahlbereiche)**
	Natürliche Zahlen
	Ganze Zahlen
	positive rationale Zahlen: gewöhnliche Brüche, Dezimalbrüche
	rationale Zahlen
	reelle Zahlen
2	**Prozentrechnung**
	Begriff Prozent
	Grundaufgaben Prozentrechnung
	Zinsrechnung
	Zinseszinsrechnung
	gewöhnlicher Dreisatz (kein Prozent) - allgemeines lineares Denken
3	**Rechengesetze / Terme / Termumformungen**
	Werte von Termen / Berechnung nach Einsetzen von Zahlen
	Umformung von einfachen Termen, z.B. Distributivgesetz
	Binomische Formeln
	Bruchterme
	Terme mit Potenzen
	Terme mit Wurzeln
4	**Gleichungen und Gleichungssysteme**
	Gleichungen / linear
	Gleichungen / Bruchgleichungen
	Gleichungen / quadratisch
	Lineare Gleichungssysteme
5	**Ungleichungen**
	Ungleichungen / linear
	Ungleichungen / Bruchgleichungen
	Ungleichungssysteme / linear
	Ungleichungen und Ungleichungssysteme / graphische Lösung
6	**Funktionen und Graphen (siehe 11. und 12 für exponentielle und trigonometrische Funktionen)**
	Zuordnungsbegriff, Wertetabelle
	Funktionen / proportional
	Funktionen / antiproportional
	Funktionen / linear
	Funktionen / quadratisch
	Funktionen / andere: zusammengesetzt, Treppenfunktionen, usw.
7	**Ebene Geometrie**
	Koordinaten - Punkte bestimmen oder ablesen
	elementare Längenbestimmung in Figuren
	Zeichnen von Figuren
	Winkelberechnung, Winkelsätze
	Streckenteilung, Strahlensätze
	Dreiecke
	Dreiecke / Winkelsumme
	Dreiecke / Kongruenzsätze und Dreieckskonstruktionen
	Dreiecke / Mittelsenkrechten, Höhen usw.

	Dreiecke / Flächenberechnung
	Ähnlichkeitssätze an Dreiecken
	Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck (Pythagoras, usw.)
	Vierecke
	Rechtecke / Flächenberechnung
	Vierecke allgemein / Flächenberechnung
	Vierecke / Eigenschaften der besonderen Vierecke
	Rechtecke / Umfang
	Vielecke
	Kreise
	Kreise / Umfang
	Kreise / Flächenberechnung
8	**Geometrische Abbildungen**
	Translationen
	Drehung
	Punktspiegelung
	Achsenspiegelung
	Verkettung von (Kongruenz-)Abbildungen
	Scherung, inhaltsgleiche Flächen
	Ähnlichkeitsabbildungen
9	**Räumliche Geometrie, einfache geometrische Körper**
	räumliche geometrische Beziehungen allgemein
	räumliche geometrische Beziehungen - Netze
	Geometrische Körper / Zeichnen
	Geometrische Körper / Volumen
	Geometrische Körper / Oberfläche
10	**Stochastik**
	Statistik / beschreibend: graphisch, Tabellen, Mittelwert, Median etc.
	Statistik / beurteilend
	Wahrscheinlichkeit
	Kombinatorik
11	**Exponentialfunktionen**
	Informell: exponentielle Prozesse
	Exponentialfunktion
	Logarithmen
12	**Trigonometrie**
	Trigonometrische Beziehungen
	Trigonometrische Funktionen

Kreuzt man nun diesen detaillierten Stoffkatalog mit den Anforderungen im Kerncurriculum in Nordrhein-Westfalen (jetzt exemplarisch nur noch die MSA-Aufgaben zugrunde gelegt; die Aufgaben aus MSA-Gy zeigen nur ganz geringe Abweichungen, da ja vieles identisch ist), so erkennt man, an welchen konkreten Inhalten bestimmte Kompetenzen in den ZP-10–Prüfungen (MSA) erfasst wurden.

Tabelle 3 – 24. Detaillierte Stoffgebiete der Sekundarstufe I (nach Tab. 3-23) in den Kompetenz-Anforderungen im Kerncurriculum Nordrhein-Westfalen Ende Sekundarstufe I: Anzahlen von Aufgaben in der MSA-Prüfung, die diese Stoffe und Kompetenzen realisieren:

	detaillierter Stoffkatalog	A2: verwenden Zahlen in unterschiedlichen Darstellungsformen	A4: in Anwendungszusammenhängen mit Zahlen, Größen etc. arbeiten	A5: Gleichungen lösen: linear, quadr., exp.	F2: stellen funktionale Zusammenhänge her	F3: identifizieren prop. Zuordnungen, rechnen mit Maßstäben	G3: zeichnen und konstruieren ebene Figuren	G4: schätzen und bestimmen Winkel, Länge, Fläche, Volumen	G5: berechnen Größen, … , Pythagoras	S3: bestimmen Häufigkeiten, Mittelwerte, Streumaße	S4: bestimmen und schätzen Wahrscheinlichkeiten
Aufgabe 1	gewöhnlicher Dreisatz		2			1					
	Werte von Termen nach Einsetzen			1							
	räuml. Geom. / Netze						3				
	räuml. Geom. / Vol.							1			
	beschreibende Statistik									1	
	Wahrscheinlichkeit										1
Aufgabe 2	gewöhnlicher Dreisatz		1								
	rechtwinklige Dreiecke (Pythagoras)								1		
	Rechtecke / Fläche							1			
	Kreise / Fläche							1			
Aufg.3	pos. rationale Zahlen	1									
	Wahrscheinlichkeit										5
Aufgabe 4	Gleichung quadratisch			2							
	Funktion quadratisch				2						
	Koordinaten - Punkte ablesen		3								
	rechtwinklige Dreiecke (Pythagoras)								1		
	gesamt	**1**	**6**	**3**	**2**	**1**	**3**	**3**	**2**	**1**	**6**

Einige zusätzliche Einschränkungen werden nun sichtbar. Beispielsweise beschränken sich Zeichnen und Konstruieren geometrischer Figuren auf das Beurteilen der Korrektheit von Quadernetzen. Bei der Kompetenz „Lösen von Gleichungen“ kommen faktisch nur (sehr einfache) quadratische Gleichungen vor und mit der „Schrittmaßregel“ eine lineare Gleichung. Letzteres ist aber – von Standpunkt der mathematischen Fertigkeiten des Schülerinnen und Schüler aus betrachtet –eher von der Art, dass probierend Werte eingesetzt werden, denn die Gleichung „gelöst“ wird.

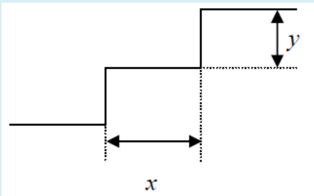
Nicht verschwiegen werden soll allerdings, dass es generell gerade auch bei den inhaltlichen Zuordnungen immer Ambiguitäten gibt. Teilweise können Kompetenzen oder Stoffbereich nicht klar getrennt werden; so ist die Unterscheidung zwischen den im Kerncurriculum genannten Kompetenzen G4 und G5 in Einzelfällen recht schwierig zu treffen. Diese Ambiguitäten rühren aber auch aus möglichen unterschiedlichen inhaltlichen Akzentuierungen her, etwa davon, ob man eine Aufgabe zur Prozentrechnung eher unter arithmetischem oder eher unter dem Aspekt der funktionalen Abhängigkeit sehen will. Am schon erwähnten Beispiel der Aufgabe „Schrittmaßregel“ kann diese tendenzielle Unbestimmtheit gut sichtbar werden:

MSA-1d - „Schrittmaßregel“

d) Für den Bau von Treppen verwendet man häufig die folgende „Schrittmaßregel“ (siehe Skizze):

$$x + 2y = 63 \text{ cm}$$

Gib ein Wertepaar für x und y an, das die Gleichung erfüllt und für den Bau einer Treppe sinnvoll ist.



Von dem, was Schülerinnen und Schüler tatsächlich durchzuführen haben, her gedacht, ist es eine Aufgabe, die nach Werten von Termen fragt und das Berechnen nach Einsetzen von Zahlen in einem Term erfordert (detaillierter Stoffkatalog 3/1). Als Basisidee steht hinter dieser Aufgabe aber die funktionale Abhängigkeit als Konzept. Aber diese Abhängigkeit selbst wird nicht explizit thematisiert. Als Kompetenz kann man am ehesten, das probierende Lösen von Gleichungen heranziehen. Auch an dieser Aufgabe zeigt sich also die soeben konstatierte verfeinerte Auflösung der Kompetenzen im Kerncurriculum durch detaillierte Stoffkataloge.

5 Curriculare Wissensstufe

Bei den zentralen Prüfungen ZP-10 handelt es sich um Abschlussprüfungen, die sich zwar zunächst „auf den Unterricht in den Jahrgangsstufen 9 und 10“ beziehen sollen, so die Erläuterungen in den „Vorgaben“ des Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen. Nach diesen Vorgaben können aber „für ihre Bearbeitung […] auch Kompetenzen erforderlich sein, welche die Schülerinnen und Schüler in den zurückliegenden Schuljahren erworben haben“.

Inwieweit auf ein breit gestreutes Kenntnisfeld aus der gesamten Schulzeit zurückgegriffen wird, kann eine Variable erfassen, die bereits bei der Analyse der ersten PISA-Ergebnisse gebildet wurde (Neubrand & al., 2002), die „curriculare Wissensstufe“. Hierbei wird grob unterschieden zwischen Aufgaben, die allein auf Grundkenntnisse aus der Grundschule(einschließlich Klasse 4) zurückgreifen, Aufgaben, die einfaches Wissen aus der Sekundarstufe I beinhalten (einschließlich Bruchrechnen und Prozentrechnung), sowie Aufgaben, die anspruchsvolleres Wissen aus der Sekundarstufe voraussetzen. Dies ist eine andere Gliederung des inhaltlichen Zuschnitts der Aufgaben, als die bisher betrachteten, weil sie auf die curriculare Herkunft der jeweiligen Inhalte abzielt, nicht auf die Inhalte selbst. Ein kumulativer Kompetenzaufbau im Mathematikunterricht hat stets auch die Funktion, curricular übergreifende Angebote zu machen. Hier aber geht es um einen Anschlussprüfung. Es zeigt sich das erwartete Bild zwischen dem HSA- und dem MSA-Bereich:

Tabelle 3 – 25. Curriculare Wissensstufe der Aufgaben (nach den Prüfungsvarianten HSA, MSA und MSA-Gy):

curriculare Wissensstufe		**HSA**	**MSA**	**MSA-Gy**
Grundkenntnisse aus der Grundschule (einschließlich Klasse 4)	Anzahl	10	3	3
	%	38,5%	10,7%	12,5%
Einfaches Wissen aus der Sekundarstufe I	Anzahl	12	9	5
	%	46,2%	32,1%	20,8%
Anspruchsvolleres Wissen aus der Sekundarstufe I	Anzahl	4	16	16
	%	15,4%	57,1%	66,7%
gesamt	**Anzahl**	**26**	**28**	**24**
	%	**100,0%**	**100,0%**	**100,0%**

Um zu diesem Gesichtspunkt der Aufgabenanalyse einen Vergleichsmaßstab zu gewinnen, kann man auf die ausführlichen Analysen von real gestellten Aufgaben in Deutschland im COACTIV-Projekt verweisen (Jordan & al., 2008). Dann zeigt sich, dass die ZP-10 sich ganz konform zu dem in Deutschland insgesamt üblichen Aufgabenbestand verhält. In der COACTIV-Analyse, einer repräsentativen Übersicht über die Aufgaben im deutschen Mathematikunterricht, wiesen nämlich Aufgaben in den Klassenarbeiten, im Unterricht und in den Hausaufgaben des 10. Schuljahrs generell höhere curriculare Wissensstufe auf als die Aufgaben des internationalen und (etwas schwächer ausgeprägt) nationalen PISA-Tests auf. Das bedeutet, dass nur wenige Aufgaben gestellt werden, die auf zurückliegende curriculare Stufen zugreifen. PISAs literacy-Ansatz hingegen nimmt bewusst auch curricular einfache Stoffe auf, ohne dass diese i.a. auf leichtere Aufgaben führen (Neubrand & al., 2002). Bei unserer Analyse ist jedoch in Rechnung zu stellen, dass wir es mit einer Abschlussprüfung mit „high stakes"-Charakter zu tun haben. Eine solche muss naturgemäß einen stärkeren curricularen Bezug aufweisen.

3.2.5 Mathematisches Modell und seine Verarbeitung: Facetten des inhaltlichen Anspruchs in der Aufgaben

Die folgenden Merkmale der in der ZP-10 gestellten Aufgaben vertiefen die bisherigen inhaltlichen Analysen. Sie sagen etwas aus über die kognitive Qualität der im mathematischen Modell der Aufgabe zu aktivierenden Inhalte. Es wird damit der in den Aufgaben realisierte inhaltliche Anspruch näher eingegrenzt. Zu diesen Aspekten gehören die in der Aufgabe angesprochenen Zahlbereiche und Größen, sowie der Umgang mit den zentralen mathematischen Begriffen Variable und Funktion. Zentral ist zudem die Frage, inwieweit eine Aufgabe auf der Ebene der konkreten Angaben bleibt oder zu allgemeinen Beschreibungen aufsteigt.

1 Zahlbereiche und Spezialisierungen innerhalb der Zahlbereiche

Ein spezieller Inhaltsaspekt ist, welche Zahlbereiche in den Aufgaben als Grundmenge, Koeffizientenbereich oder Lösungsmenge auftreten. Wir notieren stets den umfassendsten Zahlbereich, der in einer Aufgabe benötigt wird. Aussagekräftig werden die Ergebnisse aber erst, wenn man gewisse Einschränkungen innerhalb der gewöhnlich genannten Bereiche der natürlichen, ganzen, rationalen bzw. reellen Zahlen berücksichtigt. Diese Einschränkungen können den Betrag der Zahlen, aber auch deren algebraische Kompliziertheit betreffen. Jeweils zeigen solche Spezialsierungen, wie weit die Spannweite eines Zahlbereichs tatsächlich ausgenutzt wird.

Tabelle 3 – 26. Zahlbereiche (hierarchisch) und Spezialisierungen innerhalb der Zahlbereiche (nach den Prüfungsvarianten HSA, MSA und MSA-Gy):

Zahlbereiche		**HSA**	**MSA**	**MSA-Gy**
Natürliche Zahlen	Anzahl	15	5	2
	%	57,7%	17,9%	8,3%
Rationale Zahlen	Anzahl	6	10	8
	%	23,1%	35,7%	33,3%
Reelle Zahlen	Anzahl	3	9	9
	%	11,5%	32,1%	37,5%
Zahlen nicht relevant für die Aufgabe	Anzahl	2	4	5
	%	7,7%	14,3%	20,8%
gesamt	**Anzahl**	**26**	**28**	**24**
Spezifizierungen innerhalb der Zahlbereiche				
Natürliche Zahlen: kleiner als 100	Anzahl	8	2	0
	%	30,8%	7,1%	,0%
Natürliche Zahlen: zwischen 100 und 1000	Anzahl	4	2	1
	%	15,4%	7,1%	4,2%
Rationale Zahlen: nur gängige Brüche mit kleinen Nennern	Anzahl	3	0	0
	%	11,5%	,0%	,0%
Rationale Zahlen: nur einfache Dezimalbrüche	Anzahl	2	2	1
	%	7,7%	7,1%	4,2%
Irrationale Zahlen: nur π	Anzahl	1	2	2
	%	3,8%	7,1%	8,3%
Irrationale Zahlen: nur einfache Quadratwurzeln (Radikand unter 10 oder Quadratzahl)	Anzahl	1	1	0
	%	3,8%	3,6%	,0%
keine der genannten Einschränkungen in den Zahlbereichen	Anzahl	5	15	15
	%	19,2%	53,6%	62,5%
Zahlen nicht relevant für die Aufgabe	Anzahl	2	4	5
	%	7,7%	14,3%	20,8%
gesamt	**Anzahl**	**26**	**28**	**24**
	%	**100,0%**	**100,0%**	**100,0%**

In der Tat beobachtet man, jedenfalls außerhalb von MSA-Gy, eine gewisse Einschränkung bei den Zahlbereichen. Besonders auffällig ist dies bei der HSA-Prüfung. Verständlich ist zwar, eine zentrale Prüfung nicht künstlich durch komplizierte Zahlen technisch aufzuladen. Anderseits erfasst man eben einen Zahlbereich nur dann voll, wenn auch eine gewisse Breite ausgenutzt wird. Eine Aufgabe ist in der Regel umso leichter, je eingeschränkter ein Zahlbereich vorkommt (Maier & Schubert, 1978).

2 *Typen von Größen: diskret vs. stetig, extensiv vs. intensiv*

Für den kognitiven Anspruch von Aufgaben ist außerordentlich bedeutend, ob die darin vorkommenden Größen diskret oder stetig, extensiv oder intensiv sind. Bei sonst gleicher mathematischer Struktur sind Aufgaben mit stetigen Größen anspruchsvoller als mit diskreten, und ebenso Aufgaben mit intensiven Größen schwieriger als solche mit extensiven (Bassok & Holyoak, 1989). „Stetig“ sind z.B. die Größenbereiche für Längen und Zeiten, „diskret“ Stückzahlen und Geldeinheiten; „extensive“ Größen sind z.B. Längen und Flächeninhalte, „intensive“ Größen beispielsweise Dichte, Geschwindigkeit und alle Raten, bei denen eine Größe auf eine andere bezogen wird. Eine besondere Art intensiver „Größen" sind daher die Wahrscheinlichkeiten; sie sind dimensionsfreie Zahlen und werden deshalb in der Tab. 3-27 nicht erwähnt. Unterscheidungen nach dem Charakter der Größen sind gerade in der Sekundarstufe I relevant. Je beide Typen sollten nach Möglichkeit ausgewogen berücksichtigt sein.

Tabelle 3 – 27. Größen in den Aufgaben: stetig vs. diskret / extensiv vs. intensiv (nach den Prüfungsvarianten HSA, MSA und MSA-Gy):

stetig vs diskret		HSA	MSA	MSA-Gy
Stetige Größen	Anzahl	9	17	15
	%	34,6%	60,7%	62,5%
Diskrete Größen	Anzahl	14	2	2
	%	53,8%	7,1%	8,3%
trifft nicht zu	Anzahl	3	9	7
	%	11,5%	32,1%	29,2%
gesamt	**Anzahl**	**26**	**28**	**24**
extensiv vs. intensiv				
Extensive Größen	Anzahl	18	16	14
	%	69,2%	57,1%	58,3%
Intensive (relationale) Größen	Anzahl	7	2	2
	%	26,9%	7,1%	8,3%
trifft nicht zu	Anzahl	1	3	3
	%	3,8%	10,7%	12,5%
gesamt	**Anzahl**	**26**	**28**	**24**
	%	**100,0%**	**100,0%**	**100,0%**

Auffallend ist ein gewisses Übergewicht extensiver Größen im MSA-Bereich. Gerade die intensiven Größen sind es aber, die beim Übergang in der Sekundarstufe II als Voraussetzung für das Verstehen von funktionalen Anhängigkeiten und vor allen des Begriffs Steigung (Ableitung; Änderungsrate) gebraucht werden.

3 Variablenaspekte

Ähnlich wie bei den Zahlbereichen kann auch die Verwendung von Variablen spezifische Teile des inhaltlich-kognitiven Anspruchs von Aufgaben anzeigen. Variablen können unter verschiedenen Aspekten betrachtet werden (Malle, 1993): Aspekte der Unbekannten und der Veränderlichen, der Parameteraspekt („Formvariable"), der Einsetzungsaspekt. Für den inhaltlich-kognitiven Anspruch einer Aufgabe interessant ist es, ob in ihr nur ein Variablen-Aspekt vorkommt oder mehrere Aspekte gleichzeitig realisiert sind. Z.B. kommt in der Algebra bei Gleichungen mit einer Unbekannten und Zahlen als Koeffizienten nur ein Aspekt, der Unbekanntenaspekt für „x", vor, bei Gleichungen mit Parametern als Koeffizienten sind hingegen beide Aspekte enthalten, der Unbekannten- und der Parameteraspekt. Letzteres kann zwar umformungstechnisch auch nicht schwieriger sein, stelle aber die Aufgabenlöser doch vor die Überlegung, wie Variable und Parameter auseinanderzuhalten sind. Analog kommt in der Geometrie kommt bei Berechnungen mit Formeln i.a. nur ein Aspekt vor, nämlich der Einsetzungsaspekt; bleibt aber eine der Größen unbestimmt, geht es um den Typ eines Körpers, nicht um ein konkretes Beispiel.

Je mehr Variablenaspekte in Aufgaben zu aktivieren sind, desto anspruchsvoller wird der Aufgabenbestand.

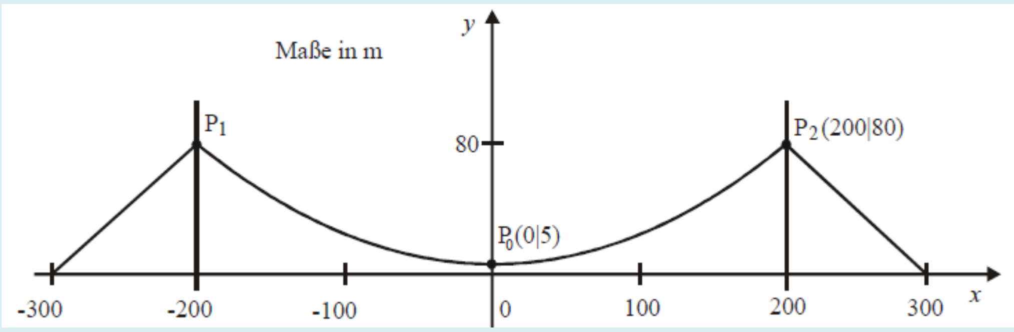
Tabelle 3 – 28. Variablenaspekte (nach den Prüfungsvarianten HSA, MSA und MSA-Gy):

Variablenaspekte		HSA	MSA	MSA-Gy
kein Variablenaspekt ist realisiert	Anzahl	24	22	16
	%	92,3%	78,6%	66,7%
nur ein Aspekt des Variablenbegriffs ist realisiert	Anzahl	2	5	7
	%	7,7%	17,9%	29,2%
mehrere Variablenaspekte kommen gleichzeitig vor	Anzahl	0	1	1
	%	,0%	3,6%	4,2%
gesamt	**Anzahl**	**26**	**28**	**24**
	%	**100,0%**	**100,0%**	**100,0%**

Die kleinen Zahlen in der dritten Zeile zeigen an, was sich auch schon durch die vorangehenden Analysen andeutete, dass dem Funktionsbegriff keineswegs die Bedeutung zugemessen wird, die er – an sich und in seiner Bedeutung für den Übergang in die Sekundarstufe II –hat. Tatsächlich werden nur in der folgenden Aufgabe zwei Variablenaspekte angesprochen: Es spielt hier neben dem Veränderlichenaspekt auch der Parameteraspekt einen Rolle, denn die Entscheidung muss darüber fallen, wie die in den Gleichungen vorgegebenen Parameter auf die Gestalt der Kurve wirken.

MSA-4d1) und MAS-Gy-4a1) - „Hängebrücken“

Der Verlauf des Stahlseils zwischen den Brückenpfeilern kann annähernd durch eine Parabel beschrieben werden.



Eine der folgenden Funktionsgleichungen gehört zu der Parabel, die den Verlauf des Stahlseils beschreibt.

A	B	C
$y = -0{,}001875 \cdot x^2 + 5$	$y = 0{,}001875 \cdot x^2 + 5$	$y = 0{,}001875 \cdot x^2 - 5$

d1) Notiere den zugehörigen Lösungsbuchstaben in deinen Unterlagen.

Allerdings zeigt sich im nächsten Aufgaben-Merkmal, dass der Funktionsbegriff selbst nur eingeschränkt genutzt wird.

4 *Thematisierung funktionaler Abhängigkeit*

Unter dem generellen Aspekt des kognitiven Anspruchs einer Aufgabe ist es wichtig, ob der für die Mathematik zentrale Funktionsbegriff explizit thematisiert wird. Wir gehen hier restriktiv vor und suchen nur nach solchen Aufgaben, in denen die „Ko-Variations-Grundvorstellung“ (vom Hofe, 1995; Büchter & Henn, 2009, S. 34) als solche verankert ist: Was ändert sich bei einer (abhängigen) Größe, wenn eine andere (unabhängige) Größe verändert wird? Nicht unter die hier gemeinte Thematisierung funktionaler Abhängigkeit fallen demnach das Einsetzen von Werten in Formeln, die Verwendung von Funktionen zur statischen Beschreibung von Kurven, wie bei den Aufgaben über Hängebrücken oder sogar bei der Korbwurfaufgabe (MSA-Gy-3c). Bei den letztgenannten Aufgaben wird nicht ausdrücklich angesprochen, wie sich die Höhe ändert, wenn der Ort verschoben wird; Ort und Höhe treten jeweils als statische Größen auf.

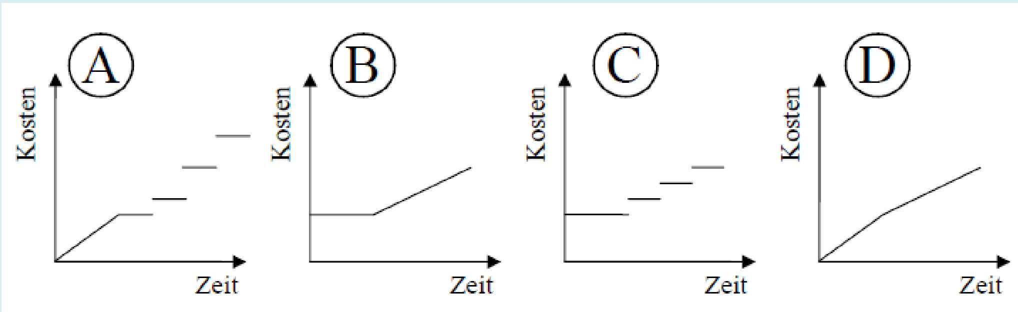
Es verbleibt dann in jeder der drei Prüfungsvarianten genau eine Aufgabe, die der expliziten Thematisierung funktionaler Abhängigkeiten im Sinne der Kovariation gewidmet ist. In der HSA-Prüfung ist es die Aufgabe über die Schwimmbad-Tarife:

HSA-4a) - „Freizeitbad“

Die Eintrittspreise im Freizeitbad WATERWORLD werden nach der folgenden Regel berechnet:

- Bis 2 Stunden: 6,00 €
- Für jede weitere angefangene Stunde zusätzlich: 2,00 €

a) Welches Schaubild stellt die Eintrittspreise am besten dar?
Notiere den Lösungsbuchstaben in deinen Unterlagen.



Bei dieser Aufgabe ist ein rein typmäßiges Urteil über eine Funktion als Ganzes zu fällen: Welche Art von funktionaler Abhängigkeit ist in den beiden Repräsentationsformen (textlich, graphisch) zum Ausdruck gebracht? Es geht hier tatsächlich um eine Realisierung der Vorstellung „Kovariation“: Wenn eine immer längere Zeit im Schwimmbad verbracht wird, wie ändert sich dann (qualitativ) der Eintrittspreis?

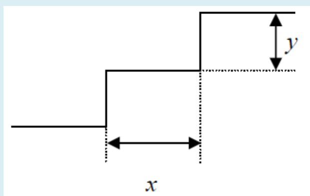
In der MSA- und MSA-Gy-Prüfung ist die schon erwähnte Aufgabe über Treppen als einziges Beispiel zu nennen:

MSA-1d - „Schrittmaßregel“

d) Für den Bau von Treppen verwendet man häufig die folgende „Schrittmaßregel“ (siehe Skizze):

$x + 2y = 63$ cm

Gib ein Wertepaar für x und y an, das die Gleichung erfüllt und für den Bau einer Treppe sinnvoll ist.



Auch wenn für Schülerinnen und Schüler wohl eher die Verfahren des Ausprobierens und Einsetzens im Vordergrund stehen werden, so ist doch damit ein Einstieg in das Erkennen kovariater funktionaler Abhängigkeiten realisiert, und hier sogar in doppelter Richtung: Wenn eine gewisse, sinnvolle Treppenbreite vorgegeben wird, dann liegt die zugehörige Höhe fest, wenn die Stufenhöhe der Treppe festliegt, etwa durch die Anzahl der Stufen und die Geschosshöhe, dann muss man / sollte man (dass es sich um eine Faustregel handelt, kommt im Text nicht klar zum Ausdruck) eine gewissen Treppenbreite einhalten. Allerdings sind noch weitergehende, die Kovariations-Vorstellung betonende Fragen, etwa wie sich y bei Gelten der Schrittmaßregel ändern wird, wenn x um einen bestimmten Betrag verändert wird, nicht angesprochen.

5 Mathematisches Modell für konkreten oder allgemeinen Fall

Inhaltlich-kognitive Ansprüche kommen in der Mathematik häufig insofern zum Ausdruck, dass in einer Aufgabe ein konkreter oder ein allgemeiner Fall zu diskutieren ist. Es kann in der Aufgabe entweder gefordert sein, das mathematische Modell nur für ein konkret-numerisches Beispiel zu bilden, oder es können in die Bildung des Modells bereits allgemein-strukturelle Gesichtspunkte eingehen. Das mathematische Wissen ist dann „abstrahiert“, es bleibt nicht abstrakt (Renkl, 1991, 1996).

In der weitaus überwiegenden Zahl sind in der HSA-Prüfung konkrete Fälle zu behandeln. Die einzige Ausnahme in der HSA-Prüfung ist die schon vorgestellte Aufgabe HSA-4a - „Freizeitbad“, in der allgemein, d.h. ohne Größenangaben, über den Typ der Eintrittspreis-Funktion zu urteilen ist.

Die MSA-Prüfungen enthalten zu mehr als ¾ konkrete Aufgaben, aber eben in einigen Aufgaben (5 in MSA und 6 in MSA-Gy) auch die Anwendung des mathematischen Wissens auf allgemeine Fälle. So ist z.B. im ersten Prüfungsteil (MSA-1b und MSA-Gy-1b) über die Korrektheit von Quadernetzen zu entscheiden, ohne dass konkrete Maßangaben gemacht werden. Man muss nur die „allgemeine“ Relation „gleich“ zwischen gewissen Kantenlängen heranziehen. Die Aufgabe zur Schrittmaßregel für Treppen changiert wohl eher zwischen konkret und allgemein.

Eine typische „allgemeine Aufgabe“ ist die Korbwurf-Aufgabe[30], in der ohne dass man numerische Größen vorgegeben hätte – man muss sogar in der Aufgabe das Problem behandeln, wie man konkrete Größen durch Einzeichnen eines geeigneten Koordinatensystems überhaupt ins Spiel bringen kann – der Gang einer Rechnung zu entwerfen ist:

MSA-Gy-3c - „Korbwurf“

Um die Technik der Spieler weiter zu verbessern, werden die Würfe mit Hilfe eines Videogerätes aufgezeichnet. Hier siehst du eine sogenannte Stroboskopaufnahme, bei welcher der Ball an verschiedenen Positionen in der Luft gezeigt wird.

Flugbahnen von Bällen können näherungsweise durch quadratische Funktionen beschrieben werden. Aus dem Bild kann bestimmt werden, ob der Ball in den Korb treffen kann oder nicht.
Beschreibe – ohne zu rechnen – ein mögliches Vorgehen, mit dem das untersucht werden kann. Nenne auch die dazu notwendigen mathematischen Methoden.

[30] In diesem Sinne strukturgleich ist auch die Aufgabe MSA-3c bzw. MSA-Gy-3b.

3.2.6 Hinweise zum Verarbeiten des mathematischen Modells: Anweisungen, gegebene und erwartete Lösungsvielfalt sowie Repräsentationsformen

Auch der Verarbeitungsprozess (Abb. 3-2) kann durch die Aufgabenstellung bereits vorgesteuert werden. Je detaillierter die Anweisungen, die für die Verarbeitung ausgegebene werden, desto mehr sind die Schülerinnen und Schüler im freien Löseverhalten eingeschränkt. Anweisungen werden sich zwar nie vermeiden lassen, und es wäre auch gar nicht sinnvoll, das stets zu vermeiden, dennoch ist eine Balance zwischen genauer Anweisung, was zu tun ist, und dem Zulassen freier Entscheidungen für die Bearbeitung einzuhalten. Weiter ist zu betrachten, ob man wirklich die gesamte Durchführung des gesuchten mathematischen Modells bis hin zu einer konkreten Lösung verlangt, oder ob man sich mit einer Beschreibung dessen zufrieden gibt, was für eine vollständige Ausführung nötig sei. Schließlich gehören zu den Charakteristika der Aufgabenstellung, die Einfluss auf die Verarbeitung des mathematischen Modells haben auch Fragen, inwieweit eine oder mehrere Lösungswege erwartet werden und in welchen Repräsentationsformen (numerisch, symbolisch, graphisch, etc.) die Aufgabe gestellt ist und die Lösung angegeben werden soll.

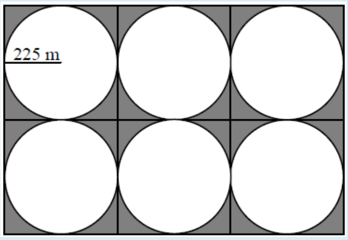
1 Grad der Ausführung der Verarbeitung des Modells

Zu den Hinweisen für den Verarbeitungsprozess des mathematischen Modells gehört die Aufforderung, das zu findende oder ggf. auch das vorgegebene mathematische Modell vollständig auszuarbeiten und auszuführen. In der Regel ist eine gestellte Aufgabe so auszuführen, dass alle Lösungsideen und Algorithmen auszuführen sind, bis einen konkrete Lösung gewonnen ist. Es ist aber auch denkbar, dass die Aufgabenstellung verlangt, das mathematisch Modell nur zu beschreiben, in variierender Detailliertheit.

In der Tat kommt in der ZP-10 fast immer der Fall der vollständigen Ausführung vor. Es gibt aber auch zwei Aufgaben, in denen ausdrücklich nur eine Beschreibung „ohne zu rechnen" verlangt wird. Dies tritt in MSA-Gy auf bei der schon zitierten Aufgabe „Korbwurf". Gemeinsam in der MSA- und der MSA-Gy-Prüfung ist dieser Fall auch noch bei dieser Aufgabe realisiert:

MSA-2c und MSA-Gy-2b - „Getreidefelder"

Aus dem Flugzeug sieht Jacksons Getreidefeld aus wie auf der Skizze rechts: Die bewässerten Kreisflächen sehen grün (hier: weiß) aus, das andere Gelände ist braun (hier: grau).



c) Die Fläche, die nicht bewässert wird, soll berechnet werden.
Beschreibe einen möglichen Lösungsweg, ohne zu rechnen.

Die Aufgabenlösungen der Schülerinnen und Schüler müssen zeigen, wie mit solchen Aufgaben umgegangen wird. Sie verlangen ja immerhin die Vorwegnahme von Rechnungen, während Schülerinnen und Schüler oft das Rechnen an sich als die eigentliche Lösung ansehen. Daher werden solche Aufgaben in Kap. 8 betrachtet.

2 Repräsentationsform von Aufgabenstellung und verlangter Lösung

Ob eine Aufgabe nur in Worten, mit graphischen Elementen, in symbolischer Schreibweise oder weiteren Repräsentationsformen gestellt wird, hat durchaus Einfluss auf das Lösungsverhalten durch die Schülerinnen und Schüler. Abgesehen vom Bestreben nach einer äußerlich attraktiven Aufgabengestaltung, werden je nach Repräsentationsform unterschiedliche Informationskanäle angesprochen. Es kann durch die Stellung einer Aufgabe in einer bestimmten Darstellungsform auch ein Wechsel zwischen verschiedenen Modi gefordert sein, oft – nicht immer – ein Indikator für weitergehende kognitive Aktivitäten.

In der ZP-10 werden tatsächlich die Aufgaben in unterschiedlichen Darstellungsmodi gestellt. Visuelle Elemente – von Photos über Zeichnungen, schematische Bilder, Funktionsgraphen, Diagrammen und Tabellen bis hin zu rein geometrischen Figuren – spielen vor allem im MSA-Bereich eine große Rolle:

Tabelle 3 – 29. Visuelle Elemente in der Aufgabenstellung (nach den Prüfungsvarianten HSA, MSA und MSA-Gy):

visuelle Elemente kommen in der Aufgabe vor:		**HSA**	**MSA**	**MSA-Gy**
ja	Anzahl	15	23	21
	%	57,7%	82,1%	87,5%
nein	Anzahl	11	5	3
	%	42,3%	17,9%	12,5%
gesamt	**Anzahl**	**26**	**28**	**24**
	%	**100,0%**	**100,0%**	**100,0%**

Man kann die visuellen Elemente auch noch einzeln aufschlüsseln. In den HSA-Aufgaben kommt kein Photo vor, bei den MSA Aufgaben sind zwei verschiedene Fotos vorhanden, auf die sich insgesamt 7 Aufgaben beziehen. Allerdings ist die Funktion der Photos hierbei ganz unterschiedlicher Natur. In der Aufgabe MSA-1a enthält das Photo direkt alle Information, die zur Bearbeitung der Aufgabe nötig ist:

MSA-1a - „Modellauto“

a) In welchem Maßstab müsste das abgebildete Modellauto vergrößert werden, damit es ungefähr so groß wäre wie das Original? Kreuze an!

□ 1 : 10 □ 1 : 100 □ 1 : 1 000 □ 1 : 10 000

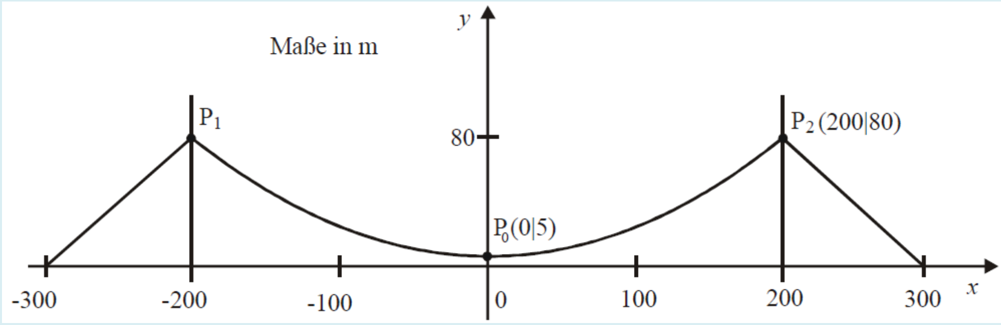
Bei den Aufgaben über die Hängebrücken ist zwar auch ein Photo beigefügt, aber es dient ausschließlich der Illustration. Alle Informationen, die zur Bearbeitung der folgenden Aufgaben gebraucht werden, können nicht von dort, sondern nur aus der unmittelbar folgenden schematischen Zeichnung, die ein visuelles Element zwischen realistischem Abbild und mathematischem Funktionsgraphen darstellt[31], entnommen werden. Sogar die nur im Text unter dem Photo gegebene Information über die Höhe des Befestigungspunktes der Stahlseile wird dort nochmals (in der Graphik) wiederholt.

[31] Es folgen in dieser Aufgabe noch zwei weitere dieser Misch-Darstellungen.

MSA-4(nur der Stamm) - „Hängebrücken“

Das Foto oben zeigt eine Hängebrücke. Die Stahlseile sind in einer Höhe von 80 m über der Straße an den Brückenpfeilern befestigt.

Der Verlauf des Stahlseils zwischen den Brückenpfeilern kann annähernd durch eine Parabel beschrieben werden.



Zusätzlich enthält die schon zitierte Aufgabe „Korbwurf“ in MSA-Gy ebenfalls ein Photo, aber hier ist die Funktion wieder inhaltlich geprägt: Das Photo ist zusammen mit dem Text der Aufgabenstellung das zentrale Informationselement in der Aufgabe. Die Schülerinnen und Schüler haben nun selbst das Photo zu einer schematischen Zeichnung umzugestalten, um die Aufgabe zu lösen.

Die üblichen graphischen Darstellungen für realitätsbezogene Daten kommen im HSA-Test dreimal vor (2 Balkendiagramme und ein Satz von Kreisdiagrammen), während im MSA-Bereich nur einmal eine Art Funktionsdiagramm (Abhängigkeit der relativen Häufigkeit des Auftretens des Wurfes „4“ von der Anzahl der Würfe – eine Funktion mit einem diskreten Definitionsbereich; siehe zur mathematischen Problematik dieser Aufgabe weiter unten) zur Datendarstellung benutzt wird, nämlich so:

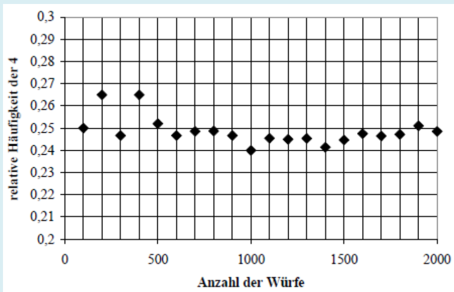
MSA-1f - „Einen Quader werfen“

f) Ein mit den Zahlen „1“ bis „6“ beschrifteter Quader wurde insgesamt 2 000-mal geworfen.

Das Diagramm zeigt die relative Häufigkeit des Wurfergebnisses „4“ nach 100, 200, 300, 400 usw. Würfen

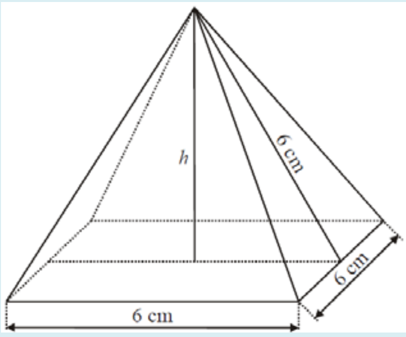
f1) Wie oft ist die „4“ bei 200 Würfen gefallen? Notiere deine Rechnung.

f2) Gib mit Hilfe des Diagramms einen Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit an, dass bei dem benutzten Quader eine „4“ fällt.



Geometrische Figuren in kontextfreier, d.h. hier: von gegenständlichen Abbildungen voll distanzierter Form kommen viermal in der HSA-Prüfung vor, bei sehr strenger Auffassung nur dreimal; denn die Pyramide in Aufgabe 3 wird als Ergebnis eines konkreten Aufklapp-Prozesses bezeichnet. Die Zeichnung selbst ist dann aber ganz im rein-geometrischen Stil:

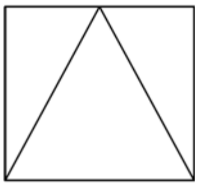
HSA-1d (Stamm) - „Maren bastelt Sterne“
Wenn Maren alle vier Dreiecke hochklappt, entsteht eine Pyramide.



In der MSA-Prüfung hingegen gibt es zweimal kontextfreie geometrische Figuren, wobei die drei Netze in MSA-3b nur einmal gezählt werden.

Wir konstatieren also durchaus eine große Vielfalt unterschiedlicher visueller Elemente, allerdings zu ganz unterschiedlichen Zwecken und mit verschiedenen Funktionen innerhalb des Aufgabenlösungsprozesses. Es kommen vor allem etliche Mischformen zwischen Abbild und mathematischer Zeichnung vor; neben den in diesem Abschnitt genannten Beispielen sind hier vor allem noch die geometrisch anmutenden Bilder von den kreisförmigen Getreidefeldern in der MSA-Prüfung zu nennen. Diese sind aber eben keine kontextfreien geometrischen Zeichnungen, sie sind immer noch nah am realen Bild (beispielsweise aus einen Flugzeug heraus) und haben daher die Funktion eines vorgegebenen „geometrischen Modells“.

Umso verwunderlicher ist es bei dieser Dominanz graphischer Elemente in der Aufgabenstellung, dass nur bei einer einzigen Aufgabe von den Schülerinnen und Schülern tatsächlich die eigene Anfertigung eines visuell-graphischen Elements als Lösung verlangt wird. Es ist in der HSA-Prüfung die Herstellung dieser Zeichnung:



Sie soll in der Aufgabe „Maren bastelt Sterne“ das auf das Pappquadrat umgeklappte Papp-Dreieck zeigen. Im gesamten MSA-Bereich wird – sieht man von der Notwendigkeit des Einfügens von Hilfslinien während des Problemlöseprozesses ab – keine eigene Produktion graphischer Elemente verlangt.

3 Vorhandensein von Anweisungen

In nur 3 Aufgaben des HSA-Tests wird auf extra ausformulierte Anweisungen für die Verarbeitung verzichtet; zwei davon betreffen einfaches Ablesen aus Grafiken, eine ist eine einfache Prozentaufgabe. Ohne Anweisung ist nur 1 Aufgabe der MSA-Prüfung, und zwar ist es die auch ohne nähere Bestimmung klare (und einfache) Frage MSA-4b – „Hängebrücke“: „Wie viele Meter beträgt der Abstand *a* der beiden Brückenpfeiler“. Eine „kurze Antwort“ (siehe 3.2.3) wird erwartet. Niemals im MSA-Gy-Test treten Aufgaben ohne ausformulierte Anweisungen auf.

„Begründe!“ kommt explizit formuliert indes nur in 2 der HSA-Aufgaben vor. Ein besonders Defizit zeigt sich bei der Anweisung „Zeichne!“: Nur die soeben erwähnte Teilaufgabe von „Maren bastelt Sterne“, verlangt von den Schülerinnen und Schüler das selbständige Zeichnen einer geometrischen Figur.

Die am häufigsten vorkommende Anweisung ist „Notiere deine Rechnung!“. Diese soll immer anzeigen, dass man eine vollständig durchgeführte rechnerische Herleitung erwartet. Bei der HSA-Prüfung tritt diese Anweisung in 61,5% der Aufgaben auf, in den MSA-Tests zu 42,9% bzw. 45,8%. Hinzu kommen noch 6 Aufgaben in HSA, 5 bzw. 4 Aufgaben in MSA bzw. MSA-Gy mit der Anweisung „Berechne!“, bei denen nur ein Ergebnis erwartet wird.

4 *Eindeutige Lösbarkeit, alternative Lösungsmöglichkeiten*

Die Tatsache, dass eine Aufgabe mehr als eine offensichtliche Lösungsmöglichkeit hat, ist durchaus bedeutend für die (empirische) Schwierigkeit der Aufgabe (Neubrand & al., 2002). Dies ist auch einsichtig, denn Aufgaben mit mehreren Lösungsmöglichkeiten zeigen auf einen erweiterten Suchraum, in dem man sich bei der Aufgabenlösung zurechtfinden muss. Aufgaben mit mehreren Lösungswegen und möglicherweise auch mehreren gültigen Lösungen haben zudem eine Reihe von produktiven didaktischen Eigenschaften (Neubrand & Neubrand, 2000), die sie jedenfalls für den Gebrauch im Mathematikunterricht wertvoll machen: Insbesondere regen sie zu einer vertieften Auseinandersetzung mit Inhalt und Lösungsmethode der Aufgabe an. In Prüfungssituationen sind die Möglichkeiten, mehrere Lösungswege aktiv zu beschreiten zu lassen, naturgemäß eingeschränkt. Mehrere Lösungen wird man nur dann in zentralen Prüfungen in Erwägung ziehen, wenn die Bewertung eindeutig zu sichern ist. Dennoch sollte man fragen, welche Elemente einer möglichen Lösungsvielfalt (im Weg und im Ergebnis) in den untersuchten Aufgaben der ZP-10 offen gehalten werden.

Der Maximalanspruch, zu einer Aufgabe explizit mehr als einen Lösungsweg per Anweisung einzufordern, ist nie in den hier untersuchten zentralen Prüfungen 2008 realisiert. Spezieller kann man fragen, ob in gewissen Aufgaben von vorneherein eine bestimmte Lösungsmethode vorgeschrieben wird. Die Ergebnisse diesbezüglich sind so:

Die Aufgaben im HSA-Test spezifizieren niemals eine bestimmte Lösungsmethode. Das liegt daran, dass die Aufgaben meist ohnehin jeweils einem Standardverfahren zuzuordnen sind.

Im MSA-Test finden wir in beiden Varianten 4 Aufgaben (14,3 % im MSA-Test, 16,7 % im MSA-Gy-Test), die eine bestimmte Methode der Lösung vorgeben. Es sind dies zunächst die drei Aufgaben, die verlangen, dass die Wahrscheinlichkeiten für einen oder zwei passende Freiwürfe im Basketballspiel so berechnet werden, dass man sich des vorgegebenen(!) Baumdiagramms bedient:

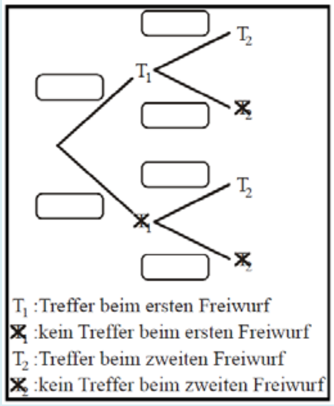
MSA-3d und MSA-Gy-3b - „Fehler beim Sport“

b) In einem Spiel erhält ein Spieler zwei Freiwürfe. Seine Trefferwahrscheinlichkeit bei jedem Freiwurf in diesem Spiel beträgt stressbedingt nur noch 70 %.

b1) Trage in die Kästchen die Wahrscheinlichkeiten für die Äste ein.

b2) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Spieler bei beiden Freiwürfen trifft? Notiere deine Rechnung.

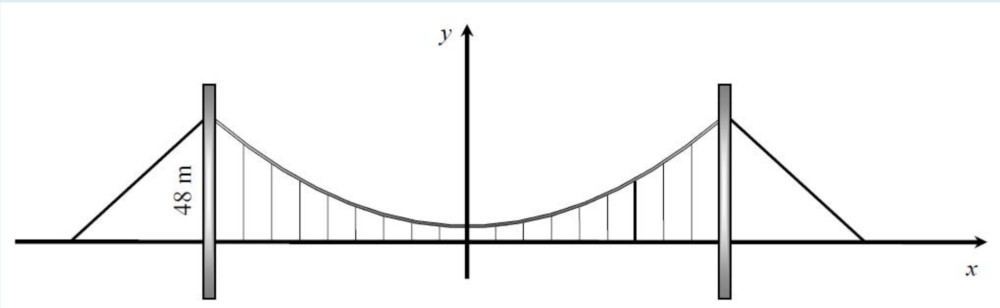
b3) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird er nur einmal treffen? Notiere deine Rechnung.



Die Aufgabe wäre wohl auch ohne die Vorgabe der Methode „Baumdiagramm“ lösbar gewesen und ggf. auch mit anderen Überlegungen, wobei aber sicher viele Schülerinnen und Schüler von sich aus genau diese Methode gewählt hätten. Die vierte Aufgabe mit Vorgabe der Methode ist eine Teilaufgabe der umfangreichen Aufgabe über Hängebrücken:

MSA-4f und MSA-Gy-4b - „Hängebrücken“

Die folgende Abbildung zeigt eine andere Hängebrücke. Die Stahlseile sind in einer Höhe von 48 m über der Straße an den Brückenpfeilern befestigt.



Das Stahlseil zwischen den Brückenpfeilern hat annähernd die Form einer Parabel. Die Funktionsgleichung dieser Parabel lautet $y = 0{,}002 \cdot x^2 + 3$ (x und y in Metern).

b) Berechne mit Hilfe der Funktionsgleichung den Abstand zwischen den Brückenpfeilern. Notiere deine Rechnung.

Die Vorgabe „mit Hilfe der Funktionsgleichung“ zeigt hier allerdings auf etwas geradezu Selbstverständliches, denn andere Informationen über die Brücke, als die in der Funktionsgleichung gegebenen, können gar nicht herangezogen werden. Die 48 m für die Aufhängehöhen sind ja offensichtlich nicht ausreichend.

Bis auf ganz wenige Ausnahmen haben alle Aufgaben zudem eine eindeutige Lösung, d.h. die Angabe von genau einer Zahl, genau einer Aussage, genau einer Figur ist als Lösung anzuerkennen. Die Ausnahmen sind allerdings nicht als „multipel lösbare Aufgaben“ in dem Sinne anzusehen, dass die Schülerinnen und Schüler sich vollständig neue Strategien zur Lösung ausdenken müssten.

Vielmehr sind es bei zwei Aufgaben einfach formale Gründe, dass man von „mehreren Lösungen“ sprechen muss: Im multiple choice Format ist mehr als eine Option richtig (bei HSA-2d2 sowie bei MSA-3c bzw. MSA.Gy-3a). Nur die HSA-Aufgabe sei daher hier wiedergegeben:

HSA-2d2

d2) Welche der folgenden Aussagen treffen zu? Notiere die Lösungsbuchstaben der richtigen Aussagen in deinen Unterlagen.

A Jeder fünfte Arbeitnehmer hat eine Zusatzversicherung.

B Jeder zwanzigste Arbeitnehmer hat eine Zusatzversicherung.

C Ein Fünftel der Arbeitnehmer hat eine Zusatzversicherung.

D 20 Arbeitnehmer haben eine Zusatzversicherung.

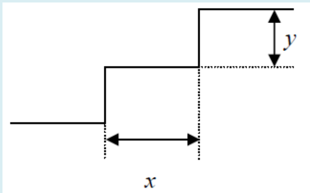
Strukturell sind mehrere Lösungen ein Kennzeichen der bereits mehrfach erwähnten Aufgabe zum Treppenbau mittels der Schrittmaßregel. Hier ist es auch vom Inhalt der Aufgabe her offen, welche der prinzipiell (unendlich) vielen Möglichkeiten bei der Aufgabenlösung als „für den Bau einer Treppe sinnvoll“ betrachtet werden:

MSA-1d - „Schrittmaßregel“

d) Für den Bau von Treppen verwendet man häufig die folgende „Schrittmaßregel“ (siehe Skizze):

$x + 2\,y = 63$ cm

Gib ein Wertepaar für x und y an, das die Gleichung erfüllt und für den Bau einer Treppe sinnvoll ist.



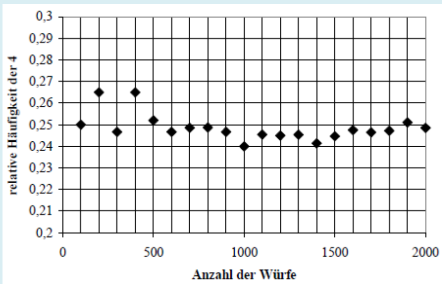
Problematisch ist das Kennzeichen der eindeutigen Lösbarkeit indes bei der folgenden Aufgabe zu sehen:

MSA-1f - „Einen Quader werfen“

f) Ein mit den Zahlen „1“ bis „6“ beschrifteter Quader wurde insgesamt 2 000-mal geworfen.
Das Diagramm zeigt die relative Häufigkeit des Wurfergebnisses „4“ nach 100, 200, 300, 400 usw. Würfen.

f1) Wie oft ist die „4“ bei 200 Würfen gefallen? Notiere deine Rechnung.

f2) Gib mit Hilfe des Diagramms einen Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit an, dass bei dem benutzten Quader eine „4“ fällt.



Die offiziellen Korrekturhinweise des Ministeriums für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen sagen „Akzeptiert werden Werte zwischen 0,245 und 0,255“. Das klingt wie das Zulassen eines offenen Lösungsbereichs. Inhaltlich ist allerdings doch nur 1 Zahl als „vernünftige“ Antwort angemessen, die relative Häufigkeit nach 2000 Würfen; denn diese Zahl ist der plausibelste der zugänglichen Schätzwerte. Korrekterweise ist dann anzufügen, dass selbst dieser Wert mit einem (unbekannten) Schwankungsintervall zu versehen ist. Wir kommen auf die mathematische Problematik gerade dieser Aufgabe bei der Besprechung der Schülerbearbeitungen zurück.

Insgesamt gesehen kann man also bei den Aufgaben in der ZP-10 nur wenig von einer „Offenheit“ in dem Sinne sprechen, dass mehrere Lösungswege und nicht-eindeutige Lösungen bei bestimmten Aufgaben zur Debatte stehen. Das Gesamturteil darüber muss aber den spezifischen Charakter zentraler, vor allem aber für die Notenfindung am Ende der Schulzeit bedeutender ("high stakes") Prüfungen berücksichtigen. Man hat gerade bei solchen Prüfungen für eine sichere Bewertung zu sorgen. Erwartungen an Aufgaben im Mathematikunterricht können nicht ungebrochen auf diese Situation übertragen werden.

4 Übergreifende Aspekte zur Charakterisierung des Aufgabenbestands der ZP-10

4.1 Prozessbezogene Kompetenzen nach den Kernlehrplänen in Nordrhein-Westfalen und in den Bildungsstandards

Der Abschnitt 3.2.4 war den mathematischen Inhalten gewidmet, die mit den Aufgaben in der ZP-10 erfasst werden sollen. Dabei dienten die Vorgaben des Ministeriums für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen, die inhaltsbezogenen Kompetenzen in den Kernlehrplänen und klassische Stoffeinteilungen als Orientierungsmarken. Die Bildungsstandards und darauf bezogen auch die Kernlehrpläne in Nordrhein-Westfalen betonen aber neben den Inhalten auch sog. „prozessbezogene Kompetenzen". Diese werden allerdings je nach Quelle durchaus unterschiedlich zugeschnitten. Für die ZP-10 sind zunächst zwei Dokumente als Orientierungsrahmen maßgeblich, die Prüfungs-Vorgaben aus dem Ministerium und die Kompetenz-Erwartungen am Ende der Sekundarstufe I in den jeweiligen Schulformen, so wie sie in den Kernlehrplänen von Nordrhein-Westfalen niedergelegt sind. An beiden orientierten wie uns hier, um allerdings festzustellen, dass keineswegs volle Kompatibilität zwischen beiden Arten von „Vorgaben" besteht. Die Bildungsstandards werden daher einen allgemeineren, und ebenso verpflichtenden Vergleichsrahmen abgeben.

Prozessbezogene Kompetenzen von Aufgaben können allerdings nicht ausschließlich aus der Aufgabenstellung heraus bestimmt werden. Inwieweit sie in einer Aufgabe nachvollziehbar angelegt sind, zeigt sich oft erst an den Schülerbearbeitungen, und hier oft erst an der Bearbeitung konkreter Aufgabenbeispiele. Im Kap. 8.6 werden wir daher anhand der „Korbwurf"-Aufgabe nochmals detailliert auf die Realisierung der prozessbezogenen Kompetenz Argumentieren/Kommunizieren eingehen.

Die Vorgaben des Ministeriums für die ZP-10 (siehe Anhang) definieren für jede Prüfungsform (HSA, MSA und MSA-Gy) jeweils eine Kompetenz-Matrix, in der inhalts- und prozessbezogene Kompetenzen gekreuzt dargestellt sind. Bestimmte Felder der Matrix sind als relevant für die jeweilige Prüfungsvariante hervorgehoben. Es werden (siehe Kap. 3.2.1) bestimmte Situationen und Problemstellungen skizziert, die mit den entsprechenden Kompetenzen bewältigt werden sollen. Die Kernlehrpläne (vgl. die gedruckten Versionen: Ministerien für Schule NRW, 2004; jeweils nach Schulform) ihrerseits formulieren Erwartungen an die Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler, die sie zum Ende der Schulzeit in der Sekundarstufe I aufweisen sollen. Die prozessbezogenen Kompetenzen sind dort ebenso wie in den Ministeriums-Vorgaben:

– Argumentieren/Kommunizieren,
– Problemlösen,
– Modellieren,
– [Gebrauch von] Werkzeugen.

Dies sind vier prozessbezogene Kompetenzen gegenüber den sechs in den Bildungsstandards Mathematik (sowohl Hauptschulabschluss wie Mittlerer Schulabschluss). Es wird nicht wie in den Bildungsstandards differenziert zwischen Argumentieren und Kommunizieren; und es geht das „Darstellen" der Bildungsstandards ebenfalls im Argumentieren/Kommunizieren auf. Ebenso gibt es in der Kompetenzmatrix nicht wie in den Bildungsstandards die zentrale prozessbezogene Kompetenz des Umgehen-Könnens mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik, also beispielsweise (nach KMK, 2004)

– das Arbeiten mit Variablen, Termen, Gleichungen, Funktionen, Diagrammen, Tabellen,
– das wechselseitige Übersetzen zwischen natürlicher und symbolisch-formaler Sprache und
– die verständige Ausführung von Lösungs- und Kontrollverfahren z.B. für Gleichungen

nicht eigens aufgeführt ist. Diese „pragmatischen“(?) Zusammenfügungen der prozessbezogene Kompetenzen der Bildungsstandards in den Kernlehrplänen von Nordrhein-Westfalen und in der Folge in den Kompetenz-Matrizen der Vorgaben ist nicht unproblematisch. Dies wird sich vor allem bei der Einzelanalyse von Schülerbearbeitungen ausgewählter Aufgaben zeigen (Kap. 8). Der technischen Performanz wird tatsächlich zu wenig Raum gegeben, so dass die Schülerinnen und Schüler in großem Maße an schematischen Verfahren hängen (Kap. 8.5) und kaum Flexibilität im symbolisch-technischen Bereich zeigen. Die nicht ausdifferenzierte Verwendung von Argumentieren und/oder Kommunizieren bewirkt offenbar, dass das originäre mathematische Argumentieren tatsächlich hinter die Aspekte des Kommunizierens zurücktritt, wie ebenfalls in der Besprechung der Schülerbearbeitungen und der Korrekturvorgaben ganz konkret aufgezeigt werden wird (Kap. 8.6 und 8.4)

Zudem gestaltet sich die Einordung der Aufgaben der ZP-10, so wie sie durch die Kompetenz-Matrizen vorgegeben sind, in die Kernlehrpläne extrem schwierig. Die dort zu jeder der prozessbezogenen Kompetenzen angegebenen Beschreibungen passen nicht zu den Feldern der Kompetenz-Matrizen. Wenn es Passungen gibt, dann immer zu den gleichen recht allgemeinen, in der Regel als erstes angeführten Umschreibungen, beispielsweise zur „Lesekompetenz“ im Bereich Argumentieren/Kommunizieren oder zum nicht weiter spezifizierten „Übersetzen“ beim Modellieren. Die Beziehungen zwischen den Ministeriums-Vorgaben zur ZP-10 und den Kernlehrplänen selbst sind daher zu überdenken.

Insgesamt geben also die Bildungsstandards die tiefer gehenden Orientierungen, wenn es um die mathematischen und kognitiven Ansprüche in den Aufgaben geht. Im Folgenden werden daher –getrennt für die drei Prüfungsvarianten – die bereits in Kap. 3.2.4 inhaltsbezogen dargestellten Zuordnungen der Aufgaben ausdifferenziert nach den prozessbezogenen Kompetenzen. Die Aufgaben werden dazu in die Felder der Kompetenz-Matrizen eingefügt; danach wird nach den Entsprechungen zu den Kompetenzen in den Bildungsstandards gesucht.

4.1.1 HSA-Prüfung

Tabelle 4 – 1. Aufgaben des HSA-Tests (2. Prüfungsteil[32]) nach inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzen gemäß den Vorgaben des Ministeriums:

	Arithmetik / Algebra	Funktionen	Geometrie	Stochastik
Argumentieren / Kommunizieren **2 Aufgaben**		- Analyse und Bewertung funktionaler Zusammenhänge in authentischen Texten (z. B. Zeitungstexte oder Gebrauchsanweisungen) **---** - Interpretation von einfachen grafischen Darstellungen funktionaler Zusammenhänge **HSA-4a**		Analyse von grafischen Darstellungen statistischer Daten (z. B. „manipulierte“ Diagramme aus Zeitungsartikeln) **HSA-2b**
Problemlösen **2 Aufgaben**			Bestimmung unbekannter Größen durch Zerlegen von Figuren **HSA-3a** oder mit Hilfe des Satzes von Pythagoras **HSA-3d**	
Modellieren **9 Aufgaben**	Sachrechnen[33] (z. B. Berechnung von Kosten, Bestimmung von Anzahlen oder von physikalischen Größen wie Temperaturunterschiede) **HSA-4c1**	Erstellung, Nutzung und Interpretation von Modellen aus den Bereichen: - Tarife (lineare Tarife und Stufentarife) **HSA-4b1, HSA-4b2** - Prozent- und Zinsrechnung (z. B. Preisreduktion, Spar- und Kreditmodelle) **HSA-2c, HSA-2d2, HSA-3c2, HSA-4c3** - Weg-Zeit-Zusammenhänge **HSA-4d2**		Zuordnung von Diagrammen zu gegebenen Realsituationen **HSA-2d1**
Werkzeuge **1 Aufgabe**	Verwendung des Taschenrechners[34] **---**		Nutzung von geeigneten Werkzeugen (z. B. zum Zeichnen von Netzen und Schrägbildern) **HSA-3c1**	

Die Aufgaben sind also über die prozessbezogenen Kompetenzen gestreut, allerdings mit einem auf die Kernlehrpläne zurückgehenden Schwerpunkt auf dem Modellieren. Sie halten sich in dieser Breite auch an die den Schulen mitgeteilten Vorgaben. Welche „Wertigkeit“ allerdings diese Aufgaben in Hinblick auf die angestrebten Kompetenzen haben, kann man hieraus noch nicht erkennen. Viel differenzierter lässt sich der tatsächlich mit den Aufgaben eingelöste Anspruch durch einen Vergleich mit den in den Bildungsstandards definierten prozessbezogene Kompetenzen einschätzen. Dort werden die prozessbe-

[32] Fünf Aufgaben des 2. Prüfungsteils folgen den Vorgaben aus dem 1. Prüfungsteil (vgl. Abbildungen 3-15, 3-16) und sind daher hier nicht berücksichtigt.

[33] Wie bereits in 3.2.1. bemerkt, ist die Kategorie „Sachrechnen“ hier auf eine rein arithmetische Aufgabe beschränkt, obwohl einem umfassenden Begriff von Sachrechnen auch andere Aufgaben entsprechen. Das gilt insbesondere für die Gesamtaufgabe HSA-4.

[34] Taschenrechnergebrauch ist nicht spezifisch einer Aufgabe zuzuordnen; er ist ein universelles Hilfsmittel.

zogenen Kompetenzen zusätzlich durch einzelne Merkmale beschrieben und diese dann mit Anforderungsbereichen verbunden. Da die die Kernlehrpläne von Nordrhein-Westfalen auf Anforderungsbereiche verzichten, hat die Referenz auf die Bildungsstandards (für den Hauptschulabschluss; vgl. KMK, 2004) erhöhte Aussagekraft. In der folgenden Gegenüberstellung beziehen wir uns auf die Einzel-Kategorien (Spiegelstriche innerhalb der Anforderungsbereiche), die in die tabellarische Darstellung der Bildungsstandards (Hauptschulabschluss; KMK, 2004) aufgenommen und in der ZP-10-Hauptschule tatsächlich realisiert sind:

Tabelle 4 – 2. Gegenüberstellung prozessbezogener Kompetenzen in den Bildungsstandards[35] und in den Vorgaben für die ZP-10-HSA:

HSA Vorgaben: **Prozessbezogene Kompetenzen für den 2. Prüfungsteil**	***AF II argumentieren*** **Ergebnisse bzgl. des Kontextes bewerten**	***AF I problemlösen*** **einfache Probleme mit bekannten Verfahren lösen**	***AFII problemlösen*** **verwenden von Strategien**	***AF I modellieren*** **vertraute und direkt erkennbare Modelle nutzen**	***AF II modellieren*** **Modellierungen vornehmen in mehreren Schritte**	***AF II darstellen*** **Beziehungen zwischen Darstellungen erkennen u. herstellen**	***AF I formal-technisch umgehen*** **Routineverfahren verwenden**	**gesamt**
Argumentieren /Kommunizieren	1					1		2
Problemlösen		1	1					2
Modellieren				1	6	2		9
Werkzeuge (Zeichengerät)						1		1
Vorgaben 1. Prüfungsteil				2	1		2	5
zu Aufgabe 1				3	1		3	7
gesamt	**1**	**1**	**1**	**6**	**8**	**4**	**5**	**26**

Diese Gegenüberstellung zeigt dies auf: Es gibt in der NRW-Kompetenzmatrix nur vier prozessbezogene Kompetenzen gegenüber sechs in den Bildungsstandards. Insbesondere fehlt in Nordrhein-Westfalen die Kompetenz des Umgehens mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik. Nur dort kann man bestimmte Aufgaben des ersten Prüfungsteils berücksichtigen. Einen zweiten Effekt zieht die Festlegung der prozessbezogene Kompetenzen in Nordrhein-Westfalen mittels der Kompetenzmatrix nach sich. Prozessbezogene Kompetenzen treten in dieser immer zusammen mit einer Bestimmung von Inhalten auf. Deshalb verteilen sich die Aufgaben manchmal quer zu den Bildungsstandards-Kompetenzen. So fallen zwei „NRW-Modellierungsaufgaben“ in die Kompetenz des Darstellens, und ebenso ist eine Aufgabe aus der in Nordrhein-Westfalen nicht getrennten Kompetenz Argumentieren/Kommunizieren dem Darstellen nach den Bildungsstandards zuzuordnen. Dieser Effekt verstärkt sich weiter im MSA-Bereich.

4.1.2 MSA-Prüfung

Für die MSA-Variante der zentralen Prüfungen ZP-10 kann man sich analog orientieren, wie bei der HSA-Prüfung, nämlich an den Vorgaben des Ministeriums, den Kernlehrplänen von Nordrhein-Westfalen und an den Bildungsstandards (für den Mittleren Schulabschluss; KMK, 2003). Zuerst geben wir wieder die Einordnung der Aufgaben in die volle MSA-Kompetenzmatrix der Ministeriums-Vorgaben wieder, wobei die Daten denen in Kap. 3.2.4 entsprechen (Abb. 3-17, 3-18). Vier Aufgaben des 2. Prüfungsteils folgen den Vorgaben

[35] „AF“ steht für die „Anforderungsbereiche“ laut den Bildungsstandards: AF I: Reproduzieren; AF II: Zusammenhänge herstellen; AF III: Verallgemeinern und Reflektieren.

für den 1. Prüfungsteil. Drei Aufgaben gehören nicht zu den in den Vorgaben genannten Kompetenzbereichen; es sind die Aufgaben MSA-4a, b, c. Taschenrechnernutzung wird wieder nicht eigens ausgewiesen.

Tabelle 4 – 3. Aufgaben des MSA-Tests (2. Prüfungsteil) nach inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzen gemäß den Vorgaben des Ministeriums:

	Arithmetik / Algebra	**Funktionen**	**Geometrie**	**Stochastik**
Argumentieren / Kommunizieren **4 Aufgaben**	Erläuterung mathematischer Zusammenhänge mit eigenen Worten und geeigneten Fachbegriffen beim Umgang mit linearen oder quadratischen Gleichungen ---	- Analyse und Bewertung funktionaler Zusammenhänge in authentischen Texten (z.B. Zeitungstexte oder Gebrauchsanweisungen) --- - Interpretation von grafischen Darstellungen funktionaler Zusammenhänge **MSA-4d1, MSA-4d2, MSA-4f, MSA-4g**		Analyse von grafischen Darstellungen statistischer Daten und deren Manipulation (z. B. aus Zeitungsartikeln) ---
Problemlösen **3 Aufgaben**			Bestimmung unbekannter Größen durch Zerlegen von Figuren, **MSA-2c** mit Hilfe des Satzes von Pythagoras **MSA-2d, MSA-4e** oder mit Hilfe von Ähnlichkeitsbeziehungen ---	
Modellieren **4 Aufgaben**		Erstellung, Nutzung und Interpretation von Modellen aus den Bereichen: - Tarife - Weg-Zeit-Zusammenhänge **MSA-2b** - Wachstumsprozesse (linear oder exponentiell) --- - Prozent-, Zins- und Zinseszinsrechnung (z.B. Preisreduktion, Spar- und Kreditmodelle) ---	Erstellung, Nutzung und Interpretation von Modellen aus den Bereichen: - Architektur (z. B. Formen von Gebäuden) --- - Verpackungen ---	Nutzung von Baumdiagrammen zur Beurteilung von Chancen und Risiken **MSA-3d1, MSA-3d2, MSA-3d3**
Werkzeuge **0 Aufgaben**	Verwendung des Taschenrechners (z. B. kritische Reflexion von Ergebnissen) ---		Nutzung verfügbarer Werkzeuge zur Bearbeitung geometrischer Situationen (z. B. Nutzung von Zirkel und Geodreieck) ---	

Die Verteilung auf die prozessbezogenen Kompetenzen ist zwar weiterhin ausgewogen. Der Aufgabenbestand selbst ist aber nun weniger breit gestreut als bei der HSA-Version der ZP-10. Wiederum kann der mathematische und kognitive Anspruch der Aufgaben am ehesten durch Vergleich mit den Bildungsstandards (Mittlere Schulabschluss; KMK, 2003) sichtbar gemacht werden. Wir orientieren uns wieder an den einzelnen Spiegelstrichen der tabellarischen Erläuterungen zu den prozessbezogenen Kompetenzen in den Bildungsstandards.

Tabelle 4 – 4. Gegenüberstellung prozessbezogener Kompetenzen in den Bildungsstandards und in den Vorgaben für die ZP-10-MSA:

Anforderungsbereich I

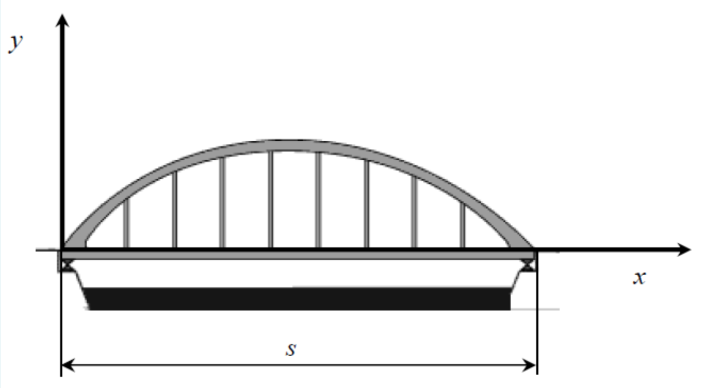
MSA Vorgaben: **Prozessbezogene Kompetenzen für den 2. Prüfungsteil**	***AF I modellieren*** **vertraute und direkt erkennbare Modelle nutzen**	***AF I Darstellungen verwenden*** **vertraute und geübte Darstellungen nutzen**	***AF I formal-technisches Umgehen*** **Routineverfahren verwenden**	***AF I formal-technisches Umgehen*** **mit vertrauten Formeln u. Symbolen umgehen**	***AF I Kommunizieren*** **einfache Sachverhalte mündlich und schriftlich darstellen**
Argumentieren / Kommunizieren				3	
Problemlösen					1
Modellieren	1	1			
Werkzeuge					
Vorgaben des 1. Prüfungsteils	2		1		
nicht aus den Vorgaben		3			
zu Aufgabe 1	3	4			
gesamt	**6**	**8**	**1**	**3**	**1**

Anforderungsbereich II

MSA Vorgaben: **Prozessbezogene Kompetenzen für den 2. Prüfungsteil**	***AF II modellieren*** **Modellierungen in mehreren Schritten**	***AF II Darstellungen verwenden*** **zwischen Darstellungen wechseln**	***AF II formal-technisches Umgehen*** **symbolische in nat. Sprache umsetzen**	***AF II formal-technisches Umgehen*** **mit Variablen, Gleichungen, … arbeiten**	***AF II kommunizieren*** **mathematikhaltige Texte, Graphiken, … sinnentnehmend erfassen**	**gesamt über alle Anforderungsbereiche**
Argumentieren / Kommunizieren			1			**4**
Problemlösen	2					**3**
Modellieren	2					**4**
Werkzeuge						
Vorgaben des 1. Prüfungsteils		1				**4**
nicht aus den Vorgaben						**3**
zu Aufgabe 1	1			1	1	**10**
gesamt	**5**	**1**	**1**	**1**	**1**	**28**

Abermals zeigen sich Verschiebungen in den Zuschreibungen von prozessbezogenen Kompetenzen nach den Bildungsstandards gegenüber der Kompetenz-Matrix. So gilt zwar für die Aufgaben zu den Hängebrücken (MSA-4 und MSA-Gy-4), dass „grafische Darstellungen funktionaler Zusammenhänge zu interpretieren“ sind; dennoch handelt es sich etwa bei folgender Aufgabe sicher nicht um eine Aufgabe zum Argumentieren oder Kommunizieren:

MSA-4g und MSA-Gy-4c – „Spannweite der Bogenbrücke“:
Eine Bogenbrücke (vgl. Abbildung unten) hat annähernd die Form einer Parabel mit zugehöriger Funktionsgleichung $y = -0{,}007 \cdot x^2 + 1{,}3 \cdot x$ (x und y in Metern).

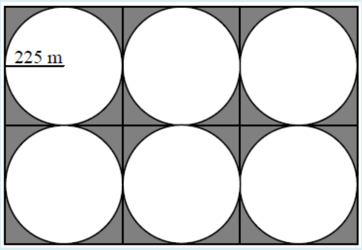


g) Bestimme die Spannweite s. Notiere deine Rechnung.

Abgesehen von der Modellierungsaktivität, die Spannweite s mit dem formalen Begriff der Nullstelle zu assoziieren, steht doch die Lösung (nicht der „Umgang mit“) der („vertrauten“) quadratischen Gleichung im Vordergrund. Dafür hat die Kompetenz-Matrix aber kein passendes Feld.

Ebenso ist es mit dieser einfachen Beschreibungsaufgabe:

MSA-2c und MSA-Gy-2b - „Getreidefelder“
Aus dem Flugzeug sieht Jacksons Getreidefeld aus wie auf der Skizze rechts: Die bewässerten Kreisflächen sehen grün (hier: weiß) aus, das andere Gelände ist braun (hier: grau).



c) Die Fläche, die nicht bewässert wird, soll berechnet werden.
Beschreibe einen möglichen Lösungsweg, ohne zu rechnen.

Die Aufgabe greift zwar eindeutig auf das Feld „Bestimmung unbekannter Größen durch Zerlegen von Figuren“ zurück, es ist aber keine Aufgabe zum Problemlösen im Sinn der Bildungsstandards, sondern entspricht dort wohl eher einer Kommunikationsaufgabe.

Vermehrt – gegenüber der HSA-Prüfungsvariante – treten also Fälle auf, in denen die Aufgaben nach den Bildungsstandards differenzierter einzuordnen sind und zudem nach Anforderungsbereichen unterscheidbar werden. Innerhalb der Bildungsstandards gesehen spielt sich die gesamte MSA-Prüfung auf den Anforderungsbereichen I und II ab.

4.1.3 MSA-Gy-Prüfung

Dieses Resümee gilt umso mehr für die MSA-Gy-Prüfung. Viele der Aufgaben sind identisch zu ZP-10-MSA. So sind die beiden soeben diskutierten Aufgaben auch in der Prüfung MSA-Gy vorhanden, so dass auch deren Problematik bleibt. Die in der MSA-Gy-Prüfung zusätzlich gestellten Aufgaben erhöhen die Anforderungsbereiche nach den Bildungsstandards. Es kommen nun zwei Aufgaben des Anforderungsbereiches III hinzu. Nur eine Aufgabe gehört jetzt noch zu den Vorgaben für den ersten Prüfungsteil, alle Aufgaben aus MSA-Gy lassen sich in die Vorgaben der Kompetenz-Matrix einordnen, die sich im Übrigen nur durch ein (nicht benutztes) Feld in der Zeile Problemlösen von der MSA-Matrix unterscheidet (vgl. Abb. 3-19, 3-20). Taschenrechnergebrauch wird nicht extra als Kompetenz erwähnt.

Tabelle 4 – 5. Aufgaben des MSA-Gy--Tests (2. Prüfungsteil) nach inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzen gemäß den Vorgaben des Ministeriums:

	Arithmetik / Algebra	**Funktionen**	**Geometrie**	**Stochastik**
Argumentieren / Kommunizieren **5 Aufgaben**	Erläuterung mathematischer Zusammenhänge mit eigenen Worten und geeigneten Fachbegriffen beim Umgang mit linearen oder quadratischen Gleichungen ---	- Analyse und Bewertung funktionaler Zusammenhänge in authentischen Texten (z.B. Zeitungstexte oder Gebrauchsanweisungen) **MSA-Gy-3c** - Interpretation von grafischen Darstellungen funktionaler Zusammenhänge **MSA-Gy-4a1, MSA-Gy-4a2, MSA-Gy-4b, MSA-Gy-4c**		Analyse von grafischen Darstellungen statistischer Daten und deren Manipulation (z. B. aus Zeitungsartikeln) ---
Problemlösen **4 Aufgaben**	Nutzung der Kenntnisse über Zahlen und Zahlbereiche zum Lösen mathematischer Probleme ---		Bestimmung unbekannter Größen - durch Zerlegen von Figuren, **MSA-Gy-2b, MSA-Gy-2d1** - mit Hilfe des Satzes von Pythagoras **MSA-Gy-2c, MSA-Gy-2d2** - oder mit Hilfe von Ähnlichkeitsbeziehungen ---	
Modellieren **4 Aufgaben**		Erstellung, Nutzung und Interpretation von Modellen aus den Bereichen: - Tarife - Weg-Zeit-Zusammenhänge **MSA-Gy-2a** - Wachstumsprozesse (linear oder exponentiell) --- - Prozent-, Zins- und Zinseszinsrechnung (z.B. Preisreduktion, Spar- und Kreditmodelle) ---	Erstellung, Nutzung und Interpretation von Modellen aus den Bereichen: - Architektur (z. B. Formen von Gebäuden) --- - Verpackungen ---	Nutzung von Baumdiagrammen zur Beurteilung von Chancen und Risiken **MSA-Gy-3b1, MSA-Gy-3b2, MSA-Gy-3b3**
Werkzeuge **0 Aufgaben**	Verwendung des Taschenrechners (z. B. kritische Reflexion von Ergebnissen) ---		Nutzung verfügbarer Werkzeuge zur Bearbeitung geometrischer Situationen (z. B. Nutzung von Zirkel und Geodreieck) ---	

Die schon bei ZP-10-MSA konstatierte Konzentration der Aufgaben auf wenige Felder der Kompetenz-Matrix hält an und verstärkt sich. Die Bildungsstandards zeigen, wie sich die Anforderungen auf die Aufgaben verteilen:

Tabelle 4 – 6. Gegenüberstellung prozessbezogener Kompetenzen in den Bildungsstandards und in den Vorgaben für die ZP-10-MSA-Gy:

Anforderungsbereich I

MSA-Gy-Vorgaben: Prozessbezogene Kompetenzen für den 2. Prüfungsteil	***AF I modellieren*** **vertraute, direkt erkennbare Modelle nutzen**	***AF I Darstellungen verwenden*** **vertraute und geübte Darstellungen nutzen**	***AF I formal-technisches Umgehen*** **mit vertrauten Formeln u. Symbolen umgehen**	***AF I Kommunizieren*** **einfache Sachverhalte mündlich u. schriftlich mitteilen**
Argum./Komm.			3	
Problemlösen				1
Modellieren	1	1		
Werkzeuge				
Vorgaben des 1. Prüfungsteils				
aus Aufgabe 1	3	4		
gesamt	**4**	**5**	**3**	**1**

Anforderungsbereich II

MSA-Gy-Vorgaben: Prozessbezogene Kompetenzen für den 2. Prüfungsteil	***AF II modellieren*** **Modellierungen, mehrere Schritte**	***AF II Darstellungen verwenden*** **zwischen Darstellungen wechseln**	***AF II formal-technisches Umgehen*** **formale Sprache in natürliche Sprache übersetzen**	***AF II formal-technisches Umgehen*** **mit Variablen, Gleichungen, … arbeiten**	***AF II kommunizieren*** **mathematikhaltige Texte, Graphiken, … sinnentnehmend erfassen**
Argum./Komm.			1		
Problemlösen	2				
Modellieren	2				
Werkzeuge					
Vorgaben des 1. Prüfungsteils		1			
aus Aufgabe 1	1			1	1
gesamt	**5**	**1**	**1**	**1**	**1**

Anforderungsbereich III

MSA-Gy-Vorgaben: Prozessbezogene Kompetenzen für den 2. Prüfungsteil	***AF III modellieren*** **komplexe und unvertraute Situationen modellieren**	***AF III kommunizieren*** **komplexe Sachverhalte mündlich und schriftlich kommunizieren**	**gesamt über alle Anforderungsbereiche**
Argum./Komm.		1	**5**
Problemlösen	1		**4**
Modellieren			**4**
Werkzeuge			
Vorgaben des 1. Prüfungsteils			**1**
aus Aufgabe 1			**10**
gesamt	**1**	**1**	**24**

Die beiden Aufgaben im Anforderungsbereich III sind die im folgenden Abschnitt unter der Perspektive „Typen mathematischen Arbeitens “ und in Kap. 8.4 und 8.6 bei den Aufgabenbearbeitungen durch die Schülerinnen und Schüler ausführlich diskutierten Aufgaben „Korbwurf“ und „parallelogrammförmiges Getreidefeld“. Insbesondere der Gesichtspunkt, wie Schülerinnen und Schüler mit den prozessbezogenen Kompetenzen Argumentieren und/oder Kommunizieren umgehen, wird dort interessieren.

4.2 Typen mathematischen Arbeitens

Der allgemeine Anspruch einer abschließenden Prüfung besteht darin, einen breiten, sogar möglichst den gesamten Bereich des vorangegangenen Mathematikunterrichts abzuprüfen. Die Vorgaben des Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen zu den zentralen Prüfungen unterstreichen diese Auffassung, indem sie ausdrücklich darauf hinweisen, dass den zentralen Prüfungen prinzipiell der gesamte Kernlehrplan zugrunde liegt und Auswahlen in den Vorgaben lediglich Hilfen für die spezifische Vorbereitung der Schülerinnen und Schüler sein sollen. Selbstverständlich ist klar, dass ohne inhaltliche Einschränkungen solche Prüfungen realiter nicht zusammenzustellen sind. Der Anspruch der inhaltlichen Breite gilt dennoch und es entsteht daher die Frage, woran man die Breite der in einer Prüfung, in einem Test umgesetzten Thematiken messen kann und wie man diese mathematikdidaktisch bewerten soll.

Vor analogen Fragen stehen auch mathematikdidaktische Bewertungen „großer“, d.h. sich auf ein Gesamtbild der mathematischen Leistungsfähigkeit von Schülerinnen und Schülern erstreckender nationaler und internationaler Vergleichsuntersuchungen. Gerade die auf „mathematical literacy“ ausgerichteten Untersuchungen – zuerst PISA, in gewisser Weise auch auf die Bildungsstandards zutreffend (J. Neubrand, 2009) – sind auf eine breite Sichtweise der Mathematik angewiesen.

Im internationalen PISA-Framework für die Tests bei PISA-2000 (OECD 1999) wird diese Breite des Aufgabenbestands eingelöst[36] durch die Klassifizierung der Aufgaben nach mathematik-didaktischen Gesichtspunkten: In den sog. Kompetenzklassen wird mit der Unterscheidung „reproduction - connection - generalization“ ein mathematikdidaktisch begründeter Anspruch an den in einer Aufgabe vorzunehmenden Modellierungsprozess formuliert. Das Framework für den nationalen Ergänzungstest in PISA (Neubrand u.a. 2001), das die Grundlage für die Neukonstruktion zusätzlicher Items war, hat diesen Gedanken aufgenommen, bringt aber Differenzierungen und Erweiterungen des internationalen Ansatzes an. Diese beziehen sich darauf, dass in die Klassifizierung der Aufgaben auch die Unterschiedlichkeit der kognitiven Prozesse eingeht, die bei der Aufgabenlösung, genauer bei der mathematischen Verarbeitung des mathematischen Modells, stattfinden werden. Damit werden Spezifika des Faches Mathematik einbezogen. In mehreren PISA-Berichten (Klieme & al., 2001; Neubrand & al., 2002; Neubrand & Klieme, 2002; Knoche & al., 2003; Rost & al., 2003) sowie daran anschließend auch in der bei COACTIV verwendeten Aufgaben-Klassifikation (Jordan & al., 2006) und ebenso in den Einordnungen der Bildungsstandards-Aufgaben (Blum & al., 2006) wurden auf der Grundlage des in Kap. 3.1 vorgestellten PISA-Aufgabenmodells die Aufgaben entsprechend der zu aktivierenden kognitiven Prozesse bei der Aufgabenbearbeitung zu den sog. „drei Typen mathematischen Arbeitens“ zusammengefasst, den

– „technischen Aufgaben“,
– „rechnerischen Modellierungs- und Problemlöseaufgaben“,
– „begrifflichen Modellierungs- und Problemlöseaufgaben“.

[36] Vgl. für das Folgende vertiefender vor allem M. Neubrand (2003).

„Technische“ Aufgaben sind dabei am leichtesten zu erklären. Es sind diejenigen Aufgaben, bei denen ein vorgegebener Ansatz mittels bekannter mathematischer Prozeduren (Rechnen, algebraische Umformungen, geometrisches Konstruieren nach vorgegebenen Regeln) kalkülhaft durchzuführen ist.

Die „rechnerischen Modellierungs- und Problemlöseaufgaben“ stellen die Anwendungsaufgaben oder die innermathematisch problemhaltigen Aufgaben dar, bei denen die Mathematisierung bzw. das Erstellen eines Lösungsschemas auf einen Ansatz führt, der dann rechnerisch, oder allgemeiner: prozedural, zu verarbeiten ist. Bei außermathematischen Aufgaben ist dies i.w. die Klasse der sog. „Textaufgaben“, wenngleich das Format nicht unbedingt einen „Text“ im üblichen Sinn als Ausgangspunkt voraussetzt. Eine „klassische“ Textaufgabe läuft nämlich meist darauf hinaus, die gesuchte Größe aus einem nach dem Verstehen der Situation zu gewinnenden Ansatz heraus zu *berechnen*.

Mit dem Ausdruck „begrifflich“ sind die Aufgaben bezeichnet, bei denen die Verarbeitung des mathematischen Modells bzw. die Problemlösung mittels des Einsatzes begrifflichen Denkens zu Ende gebracht werden kann. Begriffliches Vorgehen kann in vielerlei Gestalt auftreten. Es kann das Herstellen begrifflicher Zusammenhänge sein, das Sehen des Problems unter einem bestimmten Begriff, eine Argumentation als Antwort auf die Frage in der Aufgabe, das Aufstellen einer durchdachten Systematik, etc.. Essentiell für „begriffliches mathematisches Arbeiten“ in diesem Sinne ist, dass ein *Zusammenhang* zwischen Wissenselementen hergestellt werden muss, und dass dieser Zusammenhang sich nicht nach Durchführen eines Algorithmus, i.a. einer Rechnung, erschließt, sondern aufgrund einer erkannten oder erst konstruierten begrifflichen Beziehung zwischen den Gegenständen der Aufgabe. Diese Art des Vorgehens ist ebenso charakteristisch für mathematisches Arbeiten wie das rechnerische Verarbeiten eines Ansatzes (vgl. auch BLK, 1997).

Für die Konstruktion einer zentralen Prüfung ist daher erforderlich, Aufgaben aus allen drei Typen des mathematischen Arbeitens in ausgewogener Anzahl zusammenzustellen. Man nimmt damit auch internationale Tendenzen der Mathematikdidaktik auf, denn die Typen mathematischen Arbeitens reflektieren letztlich die grundlegenden kognitiven Aktivitäten in der Mathematik, wie sie von Hiebert (1986) und Hiebert & Carpenter (1992) herausgearbeitet wurden. Wir betonen, dass sich diese Einteilung ganz auf die kognitiven Prozesse beim Lösen von Aufgaben konzentriert und von den verschiedenen Arten von Kontexten, die hinter einer Aufgabe stehen können, abstrahiert. Die drei Typen mathematischen Arbeitens erfordern auch die Ausbildung unterschiedlicher inhalts- und prozessbezogener Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler. Die Ausgewogenheit der Aufgaben über die Typen mathematischen Arbeitens zieht daher auch eine breite Kompetenzerfassung nach sich.

In der folgenden Analyse der mathematischen Aufgaben in den zentralen Prüfungen 2008 des Ministeriums für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen legen wir die drei Typen mathematischen Arbeitens in einer nochmals spezifisch ausdifferenzierten Art zugrunde:

4.2.1 Technische Aufgaben

Bei den „technischen Aufgaben“ unterscheiden wir zusätzlich, wie etwa auch im Klassifikationssystem von COACTIV (Jordan & al., 2006),

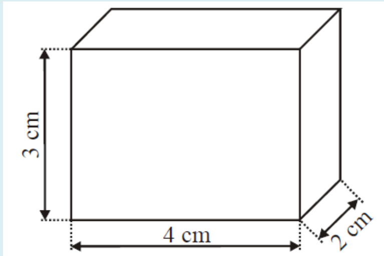
- ob allein Faktenwissen abgerufen werden muss, oder
- ob allgemein algorithmische Verfahrensweisen ohne eigentlichen Kontextbezug durchzuführen sind.

> Dem letztgenannten Typus ordnen wir auch Aufgaben zu, bei denen Standardformeln oder Standardregeln direkt anzuwenden sind[37]; auch Ablesen aus Graphiken fassen wir in diesem Sinn als eine „technische“ kognitive Leistung auf.

Faktenwissen wird in der ZP-10 nicht erhoben. Ebenso werden in keiner der Aufgaben der ZP-10 „technische Fertigkeiten“ in dem Sinne abgefragt, dass die volle Durchführung eines algorithmischen Verfahrens kontextfrei verlangt wird; vollständige Rechnungen sind immer in Modellierungsaufgaben eingebettet. Die zweitgenannte Kategorie technischer Aufgaben kommt also nur vor beim Ablesen von Werten aus Graphiken oder Tabellen und in den Varianten „Standardformeln anwenden“ und (einmal) „Konstruktionsregeln beachten“, wie es die beiden folgenden Beispiele aufzeigen:

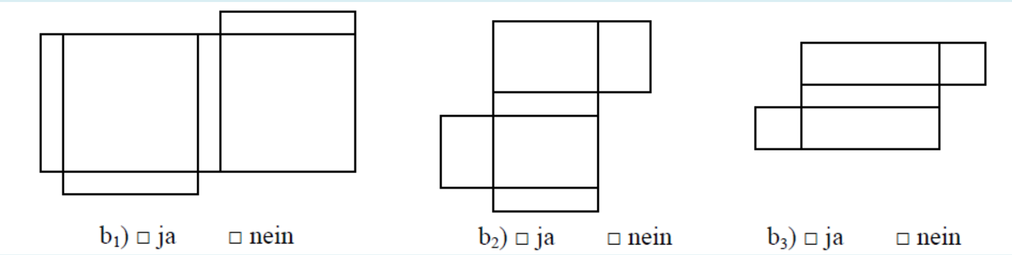
HSA-13 - „Quadervolumen“

e) Berechne das Volumen des abgebildeten Quaders. Notiere deine Rechnung.



MSA-1b und MSA-Gy-1b - Quadernetze“

b) Kann man aus dem jeweiligen Netz einen geschlossenen Quader bauen? Kreuze an!



4.2.2 Rechnerische Modellierungs- und Problemlöseaufgaben

Bei den „rechnerischen Modellierungs- und Problemlöseaufgaben“ differenzieren wir, in Übereinstimmung mit dem Vorgehen im nationalen PISA-Framework (Neubrand & al., 2000) zunächst zwischen

- den Aufgaben, bei denen die Modellierung in einem einzigen rechnerischen Schritt vollzogen werden kann, und
- den Aufgaben, bei denen mehrere Schritte rechnerischer Art bei der Modellierung erforderlich sind.

[37] Bei sehr strenger Auslegung könnte man bei solchen Aufgaben immer noch einen „Kontext“ erkennen, der durch einen spezifischen mathematischen Gegenstand aufgemacht wird, auf den dann die Formel oder Regel zu beziehen ist. Jedenfalls bei den anschließend gegebenen Beispielen dominieren jedoch die technischen Fertigkeiten.

Typische Beispiele von Aufgaben mit ‚Modellierung in einem einzigen rechnerischen Schritt' sind die beiden „Blitz und Donner"-Aufgaben, aber auch die Teilaufgabe 4e der Realschulfassung der „Hängebrücken"-Aufgabe:

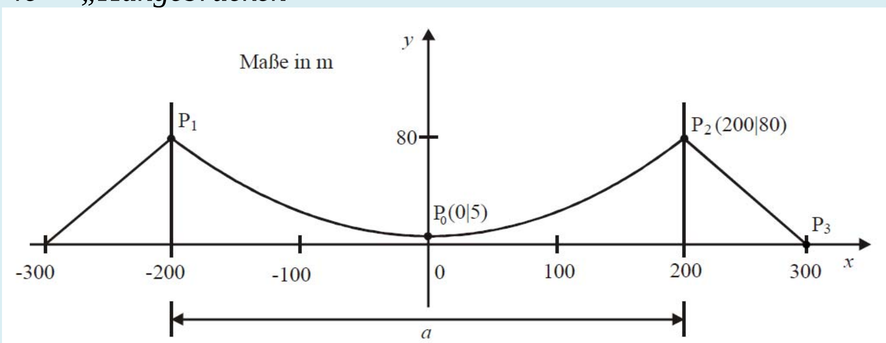
MSA-1e - „Blitz und Donner"

e) Blitz und Donner entstehen zur gleichen Zeit am gleichen Ort. Der Schall legt einen Kilometer in 3,3 Sekunden zurück. Das Licht ist so schnell, dass man es auch in großer Entfernung nahezu im Moment des Blitzes sieht.

e1) Wie weit ist ein Gewitter entfernt, wenn es 17 Sekunden nach dem Blitz donnert? Notiere deine Rechnung.

e2) Wie lange dauert es, bis es donnert, wenn der Blitz 8 km entfernt entsteht? Notiere deine Rechnung.

MSA-4e - „Hängebrücken"

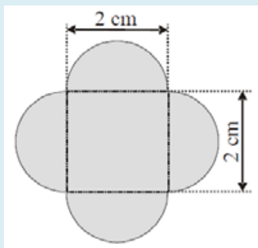


e) Berechne die Länge der Strecke $\overline{P_2P_3}$. Notiere deine Rechnung.

Aufgaben mit ‚mehreren Schritten rechnerischer Art bei der Modellierung' erfordern typischerweise, dass mehrere Teilergebnisse zu berechnen und dann adäquat miteinander in Beziehung zu setzen sind. Das kann schon in den Aufgaben des Basisteils der ZP-10 auftreten, etwa bei der folgenden Aufgabe, die Ergebnisse über Flächeninhalte von Quadrat und Kreisen miteinander in Beziehung setzt:

HSA 1d - „Quadrat mit Halbkreisen""

d) Berechne den Flächeninhalt der gesamten grauen Fläche.
Notiere deine Rechnung.



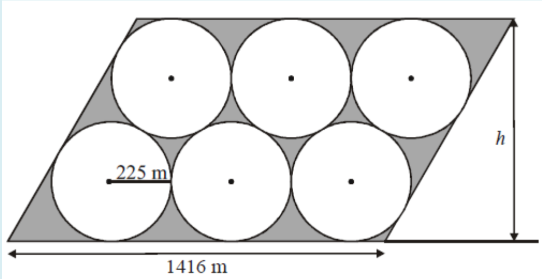
Man kann aber bei den rechnerischen Modellierungs- und Problemlöseaufgaben noch einen weiteren Untertypus entdecken, nämlich

– Aufgaben, bei denen innerhalb der (letztlich auf Rechnerisches zielenden) Modellierung eine strukturell-allgemeine Durchdringung der Situation stattfindet.

Dieser Kategorie der rechnerischen Modellierungs- und Problemlöseaufgaben gehört typischerweise die folgende, nur in der gymnasialen ZP-10 gestellte Aufgabe an:

MSA-Gy-2d - „Getreidefelder“

d) Auf einer anderen Farm sind die Bewässerungsanlagen anders angeordnet:



d2) Weise nun nach, dass *h* tatsächlich ungefähr 840 m ist. Notiere deine Rechnung.

Der erste Eindruck ist, da am Ende ein numerisches Ergebnis erwartet wird, dass es sich um eine Aufgabe mit dem Erfordernis „mehrere Schritte rechnerischer Art bei der Modellierung“ handelt. Genauere Interpretation zeigt aber: Der wesentliche Schritt besteht in der Erkenntnis, dass je drei benachbarte Mittelpunkte derart zusammengefügter Kreise gleichseitige Dreiecke mit Kantenlängen $2r$ (r für den Radius) bilden. Das ist eine strukturelle Einsicht in eine allgemein gültige geometrische Konfiguration, unabhängig von numerischen Größen, allerdings immer noch auf die rechnerisch orientierte Geometrie bezogen. Diese geometrische Struktur „im Getreidefeld“ zu sehen, in der Lösung zu erwähnen und dann (kurz) zu begründen, ist die eigentliche Anforderung an die Modellverarbeitung[38]. Es folgt dann der rechnerische Schritt, daraus $h = 2r + r\sqrt{3}$ mittels Pythagoras zu gewinnen. Diese Aufgabe erfüllt daher die Kriterien für die Variante „strukturell-allgemeine Durchdringung der Situation“ bei den rechnerischen Modellierungs- und Problemlöseaufgaben. Den Bildungsstandards nach (s.o.) handelt es sich um die prozessbezogene Kompetenz des Problemlösens, die hier im Anforderungsbereich III angesprochen ist; in der Kompetenz-Matrix der Vorgaben aus dem Ministerium ist sie ebenfalls dem Problemlösen zuzuordnen. Die Aufgabe verdient aus vielen weiteren Gründen eine gründliche Betrachtung vor allem in Hinblick auf die tatsächlichen Schülerbearbeitungen (siehe Kap.8.4).

4.2.3 Begriffliche Modellierungs- und Problemlöseaufgaben

Die Differenzierungen bei den „begrifflichen Modellierungs- und Problemlöseaufgaben“ betreffen, ebenfalls kompatibel mit dem nationalen PISA-Framework (Neubrand & al., 2000), die Reichweite der aufzuwendenden begrifflichen Zusammenhänge. Unterscheiden kann man hier zwischen

- Aufgaben, bei denen die Modellierung überwiegend mit begrifflichen (konzeptuellen) Mitteln durchgeführt werden kann, was oft in einem gedanklichen Schritt erfolgen kann,
- Aufgaben, die eine strukturelle Durchdringung komplexer Situationen mit konzeptuellen Mitteln verlangen, und
- Aufgaben, die spezifisch auf Verallgemeinerungen und Beweise zielen.

De facto kommen in allen Varianten der ZP-10-2008 aus Nordrhein-Westfalen keine Aufgaben vor, die ausdrücklich zu Verallgemeinerungen und Beweisen auffordern, auch nicht in der gymnasialen Prüfung MSA-Gy.

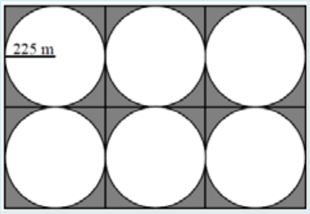
Begriffliches Modellieren der einfacheren Art tritt in unterschiedlichen Varianten auf. Oft ist dieser Typ des mathematischen Arbeitens in „Erkläre!“-Aufgaben realisiert. Man

[38] Gleichwohl wird diese Anforderung in den Auswertungsanleitungen nicht deutlich erwähnt.

muss dann nicht die Rechnungen selbst sondern die Gründe bzw. Reihenfolgen des Vorgehens darstellen, wobei es aber in der ersten Kategorie um eine relativ geringe kognitive Reichweite geht. Ein solches Beispiel ist:

MSA-2c und MSA-Gy-2b - „Getreidefelder“

Aus dem Flugzeug sieht Jacksons Getreidefeld aus wie auf der Skizze rechts: Die bewässerten Kreisflächen sehen grün (hier: weiß) aus, das andere Gelände ist braun (hier: grau).



c) Die Fläche, die nicht bewässert wird, soll berechnet werden. Beschreibe einen möglichen Lösungsweg, ohne zu rechnen.

Ebenfalls begriffliches Denken dominiert in den Aufgaben, die den Vergleich unterschiedlicher Darstellungsformen von Zahlen oder Größen verlangen, falls das konsistente Durchhalten über mehrere Möglichkeiten hinweg auschlaggebend ist und nicht etwa auf eine Rechnung rekurriert werden kann oder nur ein einziges Ergebnis herauszugreifen ist. Die folgende Aufgabe[39] ist von diesem Typ:

HSA-2d2 - „Krankenversicherung“

d) 20 % der Arbeitnehmer haben eine Zusatzversicherung.

d2) Welche der folgenden Aussagen treffen zu? Notiere die Lösungsbuchstaben der richtigen Aussagen in deinen Unterlagen.

A Jeder fünfte Arbeitnehmer hat eine Zusatzversicherung.

B Jeder zwanzigste Arbeitnehmer hat eine Zusatzversicherung.

C Ein Fünftel der Arbeitnehmer hat eine Zusatzversicherung.

D 20 Arbeitnehmer haben eine Zusatzversicherung.

In der „Korbwurf“-Aufgabe im Gymnasialteil der ZP-10 ist der komplexere Typ der begrifflichen Modellierungs- und Problemlöseaufgaben realisiert. Es muss hier ein systematischer Plan für das Vorgehen bei der Lösung eines Problems angegeben werden. Man hat keinerlei Zahlenangaben zur Verfügung und eines entscheidenden Teilprobleme der Lösung besteht geradezu darin, die konzeptuellen Möglichkeiten, Zahlen ins Spiel zu bringen, auszuloten. Das andere konzeptuelle Element ist, einen Ansatz für die quadratische Funktion zu finden und die Lösbarkeit – nicht die Lösung – eines passenden Gleichungssystems für die Koeffizienten zu diskutieren[40]. Es steht also die strukturelle Durchdringung mit konzeptuellen Mitteln im Vordergrund. Die Aufgabe ist daher kognitiv außerordentlich anspruchsvoll. Allerdings ist dieser Anspruch im Licht der Schülerbearbeitungen kritisch zu diskutieren. Das geschieht in Kap.8.6.

[39] Die Aufgabe ist analog zur bekannten PISA-Aufgabe „Die Hälfte der Zahl *a*“ konstruiert (Neubrand, 2004, S. 264).

[40] In der Auswertungsanleitung wird dieser Teil der Aufgaben-Anforderung nicht sonderlich betont.

MSA-Gy-3c - „Korbwurf“
Um die Technik der Spieler weiter zu verbessern, werden die Würfe mit Hilfe eines Videogerätes aufgezeichnet. Hier siehst du eine sogenannte Stroboskopaufnahme, bei welcher der Ball an verschiedenen Positionen in der Luft gezeigt wird.

Flugbahnen von Bällen können näherungsweise durch quadratische Funktionen beschrieben werden. Aus dem Bild kann bestimmt werden, ob der Ball in den Korb treffen kann oder nicht.
Beschreibe – ohne zu rechnen – ein mögliches Vorgehen, mit dem das untersucht werden kann. Nenne auch die dazu notwendigen mathematischen Methoden.

4.2.4 Verteilung der Aufgaben auf die Typen mathematischen Arbeitens

Mit den vorgenommenen Ausdifferenzierungen ergeben sich nun kurz gefasst die folgenden Kategorien für die Zuordnung von Aufgaben in der ZP-10 zu den Typen mathematischen Arbeitens:

„technische Aufgaben“:

– Faktenwissen abrufen,
– algorithmische Verfahren durchführen, Standardformeln direkt anwenden.

„rechnerische Modellierungs- und Problemlöseaufgaben“:

– Modellierung in einem rechnerischen Schritt,
– mehrere Schritte rechnerischer Art bei der Modellierung,
– strukturell-allgemeine rechnerische Modellierung.

„begriffliche Modellierungs- und Problemlöseaufgaben“:

– begriffliche Modellierung,
– konzeptuelles Durchdringen komplexerer Situationen,
– Verallgemeinern und Beweisen.

Gemäß diesen Kategorien sind die Aufgaben der ZP-10 wie folgt auf die Typen mathematischen Arbeitens verteilt:

Abbildung 4 – 7. Typen mathematischen Arbeitens in der HSA-Prüfung.

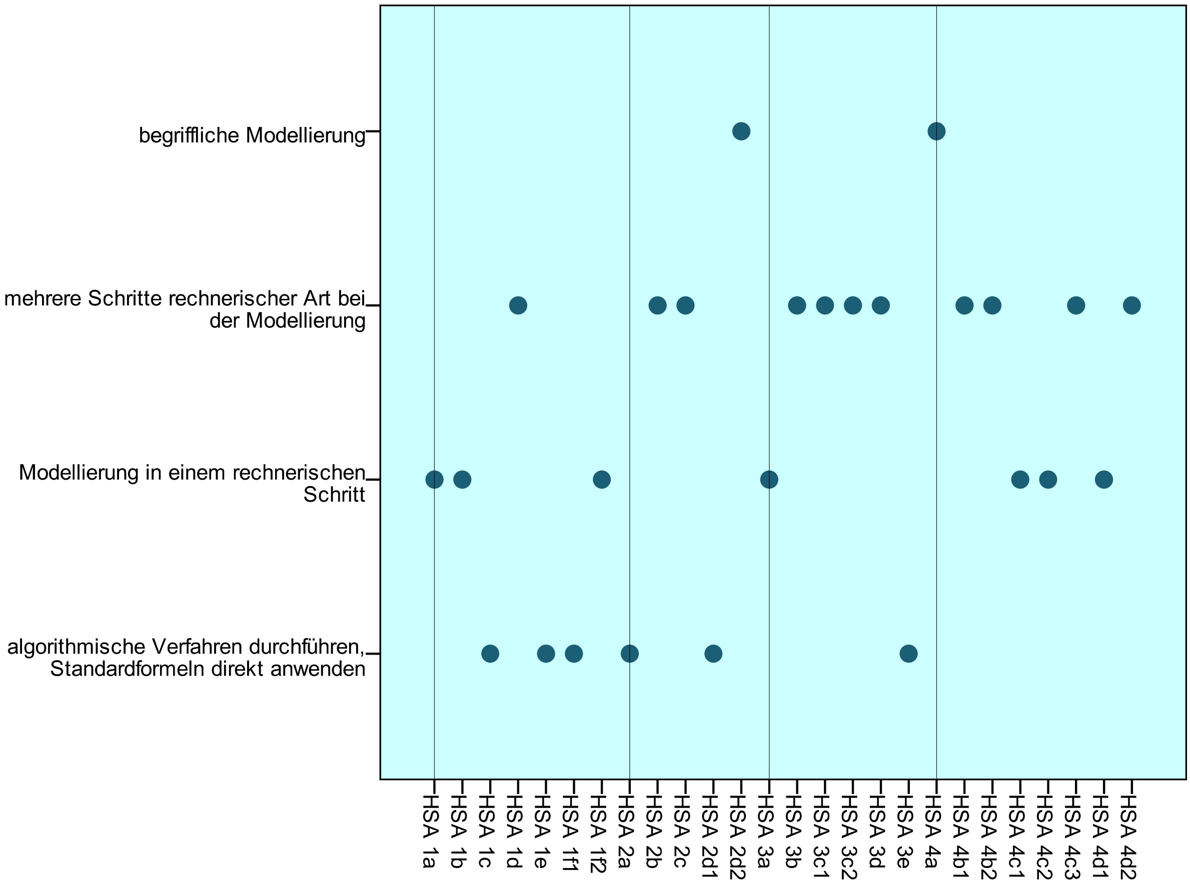


Abbildung 4 – 8. Typen mathematischen Arbeitens in der MSA-Prüfung.

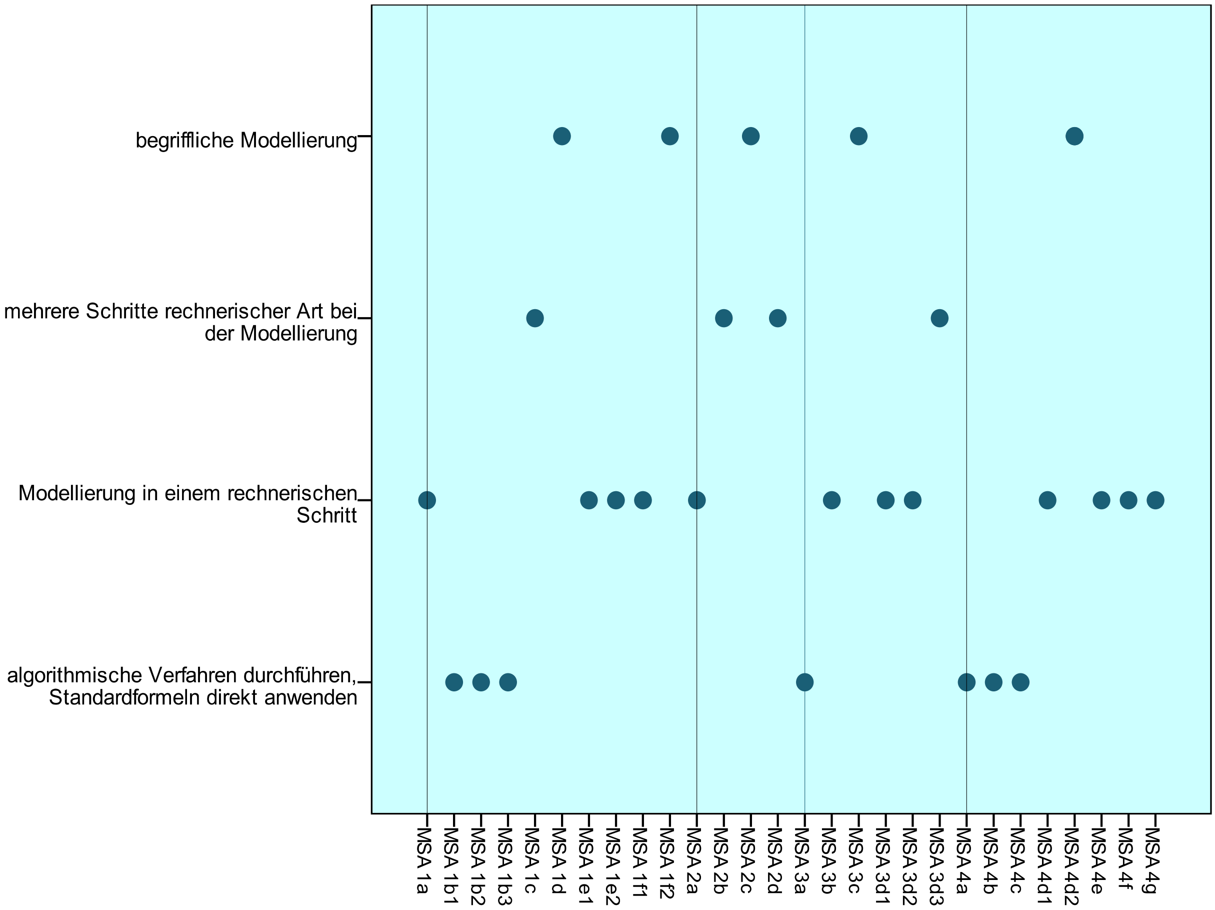
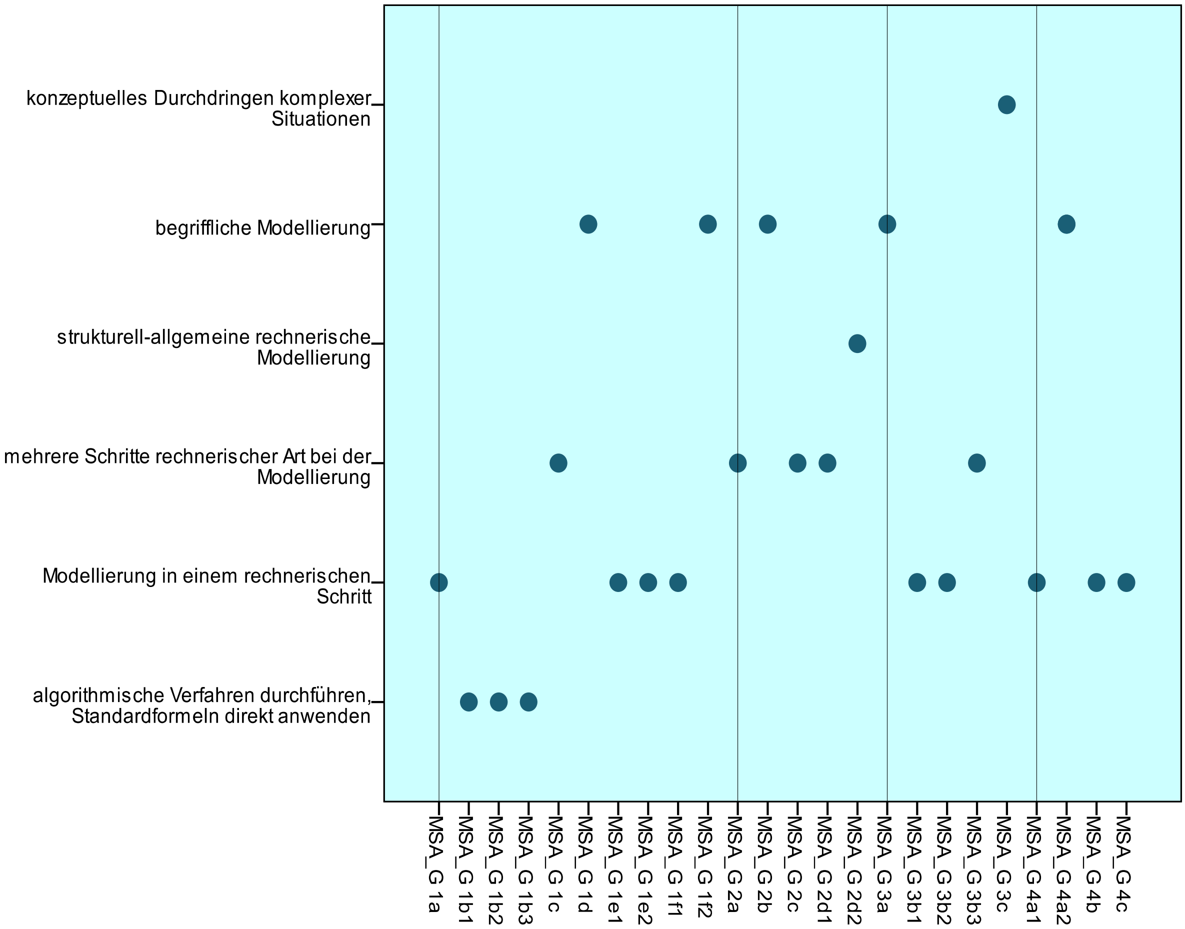


Abbildung 4 – 9. Typen mathematischen Arbeitens in der MSA-Gy-Prüfung.



Die Analyse der Verteilung der Aufgaben über die Typen mathematischen Arbeitens zeigt dies:

(a) Es fehlen zunächst die im strengen Sinne rein technischen Aufgaben, etwa das Lösen von Gleichungen oder Umformen von Termen, ohne dass dies in Modellierungskontexte eingebaut wäre. Diese Beobachtung reproduziert allerdings nur die in die ZP-10 eingeflossenen Intentionen der Kernlehrpläne: Dort wird eben ausdrücklich den technischen Fertigkeiten nur eine Zulieferfunktion für Modellierungs- und Problemlöseaufgaben zugeschrieben.

(b) Allerdings zeigt sich nun gerade in den beiden MSA-Varianten der ZP-10, dass die mit Kontexten vorkommenden rechnerischen Verarbeitungen des mathematischen Modells überwiegend von recht einfacher Natur sind. Überraschenderweise sind in der HSA-Prüfung mehr Aufgaben mit mehrschrittiger Verarbeitung zu finden als in den MSA-Prüfungen. Von den Prozessen bei der rechnerischen Verarbeitung des mathematischen Modells her gesehen kann man die MSA-Prüfungen also nicht als anspruchsvoll bezeichnen. Eine Ausnahme machen aber die beiden oben geschilderten gymnasialen Aufgaben mit dem Potential zur strukturell-allgemeinen Verarbeitung.

(c) Dass Beweisen und Verallgemeinern nicht vorkommt, ist jedenfalls für die Gymnasialprüfung als Manko anzusehen. Man verzichtet somit auf zentrale mathematische Tätigkeiten (Bauer, 1978), die insbesondere für den Fortgang des Curriculums in der Oberstufe bedeutend wären, freilich auch dort nach vielfältiger Meinung (Baptist & Winter, 2001; Borneleit & al., 2001) nicht die Rolle spielen, die ihnen zukämen.

Die *drei* Typen mathematischen Arbeitens, ohne die für die vorausgehenden Tabellen verwendeten Ausdifferenzierungen, sind in den Prüfungsvarianten so verteilt, wie es die folgende zusammenfassende Tabelle wiedergibt:

Tabelle 4 – 10. Übersicht über die drei Typen mathematischen Arbeitens (nach den Prüfungsvarianten HSA, MSA und MSA-Gy und den beiden Prüfungsteilen). Anzahlen von Aufgaben:

	HSA		**MSA**		**MSA-Gy**	
	1. Prüfungs-teil	**2. Prüfungs-teil**	**1. Prüfungs-teil**	**2. Prüfungs-teil**	**1. Prüfungs-teil**	**2. Prüfungs-teil**
technische Aufgaben	3	3	3	4	3	0
rechnerische Modellierungs- und Problemlöseaufgaben	4	14	5	11	5	10
begriffliche Modellierungs- und Problemlöseaufgaben	0	2	2	3	2	4
gesamt	**7**	**19**	**10**	**18**	**10**	**14**

Die Tabelle arbeitet nun übersichtlich heraus, dass die ZP-10 in allen Varianten ein durch den Modellierungsschwerpunkt der Kernlehrpläne bedingtes Übergewicht des rechnerischen Typus hat. Insgesamt kristallisieren sich somit in dieser zusammenfassenden Analyse unter dem Begriff „Typen mathematischen Arbeitens" weiterhin die bereits bei den einzelnen Aufgaben-Merkmalen und auch bei der Analyse der prozessbezogenen Kompetenzen erkannten Charakteristika der ZP-10 heraus. Die im folgenden Kap. 5 vorgenommenen Einzelanalysen ausgewählter Aufgaben werden diese Eindrücke auf der Aufgaben-Ebene vertiefen. Es werden dabei zwar einzelne Aufgaben diskutiert, aber sie stehen exemplarisch für zentrale Problematiken der Konstruktion mathematischer Aufgaben. Auf die zugehörigen Kompetenzen auf Schülerebene kommen wir in Kap. 8 bei der Analyse konkreter Schülerbearbeitungen wieder zu sprechen

5 Allgemeine Problematiken bei der Aufgaben-Stellung, die bei konkreten Aufgaben erkennbar werden

Manche grundlegende Problematiken der Aufgabenstellung werden erst bei der Betrachtung einzelner Aufgaben sichtbar. Dennoch handelt es sich dabei um allgemeine Fragen, auf die man bei der Konstruktion von Aufgaben für die unterschiedlichsten Zwecke kommen wird, für Testaufgaben, Prüfungsaufgaben und Unterrichtsaufgaben. Die Bewusstheit über solche Grundproblematiken ist eine Voraussetzung für die reflektierte Konstruktion von Aufgaben. In diesem Kapitel folgen Einzelanalysen von Aufgaben noch unter dem Gesichtspunkt der Aufgabenstellung; in Kap. 8 werden Analysen von einzelnen Aufgaben durchgeführt, in die dann auch die Beobachtung von konkreten Schülerlösungen eingehen wird. Beide Analyseteile zielen darauf ab, die unterschiedlichen Parameter, die den kognitiven Anspruch und die Schwierigkeit einer Aufgabe beeinflussen, noch spezifischer – gleichwohl unter generalisierbarer Perspektive – herauszuarbeiten.

5.1 Zum generellen Problem der Aufgaben zu Basiskompetenzen

Der erste Prüfungsteil der ZP-10 – die „Aufgabe 1" mit ihren 7 (in HSA) bzw. 10 (in MSA und MSA-Gy) Aufgaben – ist in allen Varianten der ZP-10 dem Abprüfen von „Basiskompetenzen" gewidmet, wie es in den Vorgaben des Ministeriums für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen heißt. Die Frage muss also gestellt werden, inwieweit hier tatsächlich Grundkenntnisse tangiert werden. Es ist dabei allerdings erklärte „Politik" der aktuellen Kernlehrpläne von Nordrhein-Westfalen, mathematische Fertigkeiten keinesfalls losgelöst von Kontextbindungen und realitätsorientierten Einkleidungen zu erfassen, sondern auf solche Kompetenzen abzuheben, „die für einen angemessenen Umgang mit Zahlen und Größen im Alltag sowie für das vertiefte Anwenden und Betreiben von Mathematik eine besondere Rolle spielen (Basiskompetenzen)" (Ministeriumsvorgaben, siehe Anhang und Kap. 2.1). Damit sind zwei Grundtypen von Basiskompetenzen angesprochen.

In der HSA-Prüfung ist der erste Typ, Basiskompetenzen für den mathematischen Umgang im Alltag, umgesetzt in den Aufgaben 1a – „Auto fährt in 1 Stunde …", 1b – „Kisten auf LKW" und 1f – „Ergebnisse einer Klassenarbeit". Die Aufgaben 1c – „Umfang eines Quadrats", und 1e – „Volumen eines Quaders" kann man im Sinn des zweiten Typs als kontextfreies Abprüfen von Fertigkeiten ansehen, und Aufgabe 1d – „Fläche einer Figur" ist eine rechnerische Problemlöseaufgabe mit innermathematischem Kontext, durchaus nahe an einer fertigkeitsbezogenen Aufgabe[41]. Auch in Aufgabe 1f1 steht eine Fertigkeit, das Ablesen konkreter Werte aus einer graphische Darstellung, im Vordergrund.

Im HSA-Bereich wird man fragen müssen, ob das Spektrum der abgeprüften Basiskompetenzen breit genug ist. Immerhin sind drei der 7 Aufgaben einfache geometrische Berechnungen. Die in den Vorgaben erwähnten Fähigkeiten zum Schätzen und Runden fehlen.

Im MSA- und MSA-Gy-Bereich sind Basiskompetenzen erster Art umgesetzt in den Aufgaben 1a – „Maßstab Modellauto", 1b – „Quadernetze", 1c – „Werkstück" und 1e – „Blitz und Donner. Die Aufgabe „Quadernetze" betrachten wir als „technisch" (siehe Kap. 4.2), indem einfache Konstruktionsregeln anzuwenden sind. Die anderen Aufgaben haben außermathematische Kontexte. Die Ministeriums-Vorgabe „Umgang mit Variablen, Termen und Gleichungen" soll durch die Aufgabe 1d – „Schrittmaßregel" eingelöst werden, der stochas-

[41] Die Schwierigkeit, solche Aufgaben theoretisch einzuordnen, wurde bereits im Abschnitt über Typen mathematischen Arbeitens diskutiert.

tische Teil der Vorgaben durch 1f – „Einen Quader werfen“. Beide Aufgaben sind kognitiv anspruchsvoll. So kommt in der gesamten folgenden MSA- und MSA-Gy-Prüfung keine der „Schrittmaßregel“ vergleichbare Aufgabe zum Verständnis funktionaler Zusammenhänge mehr vor und 1f ist aufgrund des gewählten Zufallsexperiments für Schülerinnen und Schüler schwer zu durchschauen (siehe die Einzelbesprechung von Schülerbearbeitungen in Kap. 8.2).

Generell scheint also ungeklärt zu sein, inwieweit nicht nur elementare inhaltliche Kompetenzen, wie die Reproduktion von Regeln (sei es kontextfrei oder innerhalb realitätsorientierter Aufgabenkontexte), zu den Basiskompetenzen gerechnet werden sollen, sondern auch anspruchsvollere prozessorientierte Kompetenzen. Nur auf rechnerisch abzuarbeitende Modellierungsaufgaben sollte man sich jedoch nicht beschränken. Zu bedenken ist weiter, ob nicht auch rein formale mathematische Fertigkeiten – Rechnen mit Zahlen und Termen, standardisiertes Zeichnen – unter den Basiskompetenzen Platz finden sollten, etwa im Sinne des von Bruder mehrfach betonten Wachhaltens des Basiskönnens (Bruder, 2008). Es scheint uns diese Problematik auch in der Mathematikdidaktik noch nicht voll ausdiskutiert zu sein, wenn man an die derzeit kontrovers verlaufenden Diskussionen über „Mindeststandards“ denkt.

5.2 Kohärenz in Aufgabengruppen: Von verbindenden Kontexten zur zusammenhängenden Mathematik

Auch für zentrale Prüfungen gilt ein Grundprinzip jeder bewussten Gestaltung von Lehr-Lern-Umgebungen: Die Schülerinnen und Schüler werden anhand von konstruierten Aufgaben kognitiv aktiviert und somit durch gedankliche Zusammenhänge geführt. Zwar re-konstruieren (als Individuen) und ko-konstruieren (im sozialen Geschehen des Unterrichts) die Schülerinnen und Schüler diese Zusammenhänge jeweils individuell, aber gerade dies hat zur Folge, dass Reihenfolgen von Teilaufgaben, Bezüge der Aufgaben untereinander, Wiederaufnahmen von Gedanken oder das Hinnehmen von Gedankensprüngen wichtige Kriterien für die Aufgabenkonstruktion sind. Einflüsse sind dabei in beiden Richtigen vorhanden: Die Aufgabenkonstruktion beeinflusst – nicht voll vorhersehbar – die kognitiven Prozesse, die bei den Schülerinnen und Schüler ablaufen, und umgekehrt hat die Aufgabenkonstruktion auf diese Prozesse – soweit wie möglich und erkennbar – Rücksicht zu nehmen.[42] Idealerweise besteht „Kohärenz“ innerhalb einer Aufgabengruppe dann, wenn man innerhalb der Aufgabengruppe von verbindenden außermathematischen oder innermathematischen Kontexten ausgehend gezielt zum Aufbau, zur Entfaltung und Weiterführung mathematischer Inhalte kommt.

Die ZP-10 in Nordrhein-Westfalen wählt eindeutig die Option, außermathematische Kontexte in Aufgabengruppen als verbindende Klammern einzusetzen. Wie das Zusammenspiel von Kontexten und Inhalten sowie vor allem der Aufbau und die Sequenz der Inhalte stattfinden, definiert letzlich die Kohärenz in einer Aufgabe. Wir zeigen dies in Folgenden *exemplarisch* an den Aufgabengruppen der HSA-Prüfung, weil die Grundprob-

[42] In der Instruktionspsychologie wird die hier angeschnittene Problematik unter Stichworten wie Sequenzierung und Strukturierung verhandelt. Überlegte Sequenzierung im Unterricht kann dabei bessere Lernergebnisse auslösen als weniger strukturierter Unterricht (vgl. für den Grundschulunterricht in den Naturwissenschaften Hardy & al., 2006). Unseres Wissens ist die analoge Problemstellung für Testaufgaben nicht systematisch untersucht; für Unterrichtsaufgaben sind Gesichtspunkte der Sequenzierung in J. Neubrand (2002, Kap. 22 und 23) beschrieben.

lematik und mehr oder weniger gelungene Beispiele auch schon hier herausgearbeitet werden können; die gleichen Maßstäbe sind natürlich auch an die MSA- bzw. MSA-Gy-Prüfungsvarianten anzulegen. Unter Aufgabengruppe verstehen wir dabei die in der ZP-10 als Aufgabe 1, Aufgabe 2, Aufgabe 3, Aufgabe 4 bezeichneten Zusammenstellungen mehrerer von den Aufgabenstellern zueinander in Beziehung gesetzten Teilaufgaben.

Die Aufgabengruppe HSA-1 und ebenso auch die identischen Aufgabengruppen MSA-1 bzw. MSA-Gy-1 sind, wie soeben besprochen, der Prüfung von Basiskompetenzen gewidmet. Diese Gruppen sind daher bewusst ohne kontextuellen und inhaltlichen Zusammenhalt konstruiert. Das ist mit Blick auf die Funktion dieser Aufgaben zu akzeptieren. Den Lehrerinnen und Lehrern ist dies gemäß den Vorgaben des Ministeriums sogar vorab bekannt. Bei den anderen drei Aufgabengruppen wird den Schülerinnen und Schülern jeweils mit einem kurzen Vorspann aus Texten Graphiken, Bildern – dem sog. „Stamm“ der Aufgabengruppe – signalisiert, dass nun die Auseinandersetzung mit einem bestimmten außermathematischen Kontext erfolgen wird.

In der Aufgabengruppe ***HSA-2*** wird mit einem kurzen Text und einer Graphik das Thema ***„Krankenversicherung“*** aufgerufen. Dieses Thema, genauer: die zeitliche Entwicklung der Beitragssätze von 1970 bis 2005, wird für die Aufgaben HSA-2a und -2b unmittelbar sowie in Grenzen auch noch in HSA-2c beibehalten. HSA-2c nimmt eine der Informationen aus der einleitenden Graphik auf, wiederholt diese jedoch, ergänzt sie um ein neues Kontext-Element (Arbeitnehmer zahlt die Hälfte des Beitrags; vgl. Kap. 5.3) und fährt dann mit einer konkreten Berechnung anderen Inhalts weiter. HSA-2d beginnt nochmals mit einer neuen Information, gewissermaßen einem neuen „Stamm“, und setzt dann mit den Unteraufgaben HSA-2d1 und -2d2 ein. Die neue Information „20 % der Arbeitnehmer haben eine Zusatzversicherung“ soll den Stamm der Gesamtaufgabe fortsetzen. Es ist aber nicht notwendig, dass die Schülerinnen und Schüler dies so auffassen. Die Zusatzversicherung kann auch irgendeine „andere“ Versicherung sein, und die Aufgaben HSA-2d1 und -2d2 sind trotzdem lösbar (vgl. auch das folgende Kap. 5.3). Dass die Kontext-Informationen der Reihe nach auftreten, ist verständlich, denn so wird die Anforderung ans Leseverständnis reduziert.

Die behandelten mathematischen Inhalte in der Aufgabengruppe HSA-2 sind untereinander zwar durch das permanente Vorkommen von „Prozent“ verknüpft. Es werden allerdings jeweils verschiedene, sich gegenseitig nicht aufbauende mathematische Aspekte angesprochen. Von mathematischem Zusammenhang kann man gerade noch bei HSA-2a und HSA-2b sprechen, denn beide Aufgaben dienen dem genaueren Betrachten der abgebildeten Graphik. HSA-2c unterbricht aber diesen mathematischen Zusammenhang wieder, indem in einer Modellierungsaufgabe eine konkrete Berechnung stattfinden soll. Abermals wechselt anschließend der mathematische Aspekt, denn die beiden letzten Aufgaben HSA-2d1 und -2d2 haben eine andere gemeinsame mathematische Klammer, das Nachdenken über die möglichen Darstellungen und Bedeutungen von 20 %. HSA-2d1 und -2d2 hängen aber damit wirklich auf mathematischer Ebene systematisch zusammen, indem die erste der Aufgaben nach graphischen Interpretationen fragt und die zweite Aufgabe nach situativen Zuordnungen zum Prozentbegriff.

Die Aufgabengruppe ***HSA-3*** behandelt die Situation ***„Maren bastelt Sterne aus Pappe“***. Die Funktion dieses bis zum Ende konsequent durchgehaltenen Kontexts ist es, die auftretenden geometrischen Aufgaben nicht durch allzu viel sprachlich ausgedrückte Fachbegrifflichkeit zu belasten. Die Zeichnung, die Marens Vorüberlegungen darstellt, enthält nämlich geometrische Informationen, die dann im Text gar nicht mehr erscheinen müssen, etwa, dass die Dreiecke gleichschenklig sind und dass ihre Höhe 6 cm beträgt (vgl. Kap. 3.2.1-4).

Die mathematisch Inhalte, und damit in der Intention auch die kognitiven Verknüpfungsleistungen der Schülerinnen und Schüler, sind über weite Strecken kohärent. Mit Aufgabe HSA-3a sind die Schülerinnen und Schüler – indirekt durch die Art der Aufgabenstellung – zunächst aufgefordert, sich ein genaues Bild der geometrischen Konfigurationen zu machen. Das Ablesen der Seitenlänge *l* der Pappe gibt die Gelegenheit – von den Schülerinnen und Schülern angenommen oder nicht -, die angezeichneten 6 cm als die Höhe des Dreiecks zu verstehen, und genau diese Information braucht man in Aufgabe HSA-3b. Auch HSA-3c1 greift direkt auf die nun in zwei vorherigen Aufgaben gewonnenen Erkenntnisse zurück: Man kann nur dann zeichnen, wenn man erkannt hat, dass die Spitze des Dreiecks auf die gegenüberliegende Quadratseite fällt.

HSA-3c2 hingegen stört diese begonnene mathematische Kohärenz deutlich. Die Frage nach den Prozenten ist an dieser Stelle weder sachlich geboten, noch führt sie einen mathematischen Gedanken weiter[43]. Diese Störung hätte allerdings leicht vermieden werden können. Wäre nach einer Begründung dafür gefragt worden, dass das Dreieck die Hälfte des Flächeninhalts des Quadrats ausfüllt, wäre unmittelbar der Anschluss an die Analyse der bereits andiskutierten geometrischen Figuren angeschlossen worden. Kohärenz wäre wieder hergestellt.

Davon abgesehen beobachten wir von HSA-3a über -3b und -3c1 eine organisch aufbauende Fortführung des mathematischen Gedankens, von einer einfachen geometrischen Zeichnung zu einer räumlichen Figur zu kommen. Diese Figur ist in HSA-3d und -3e die Pyramide, die man sich tatsächlich durch Auffaltprozesse, wie sie in HSA-3c1 gedanklich bereits angebahnt sind, erzeugt denken kann. Die Aufgaben HSA-3d und -3e benutzen also abermals den Stamm der Gesamtaufgabe HSA-3 und führen ihn durch eine kurze weitere Information konsequent weiter. Es bleiben alle Maße und die geometrischen Zusammenhänge erhalten.

Was sich hier als konsequent kohärent konstruierte Aufgabenabfolge darstellt, ist allerdings ausschließlich aus der Perspektive der Aufgabensteller so nachzuvollziehen. Ob die Schülerinnen und Schüler tatsächlich diese Konstruktionsmerkmale erkennen und diesen in ihren Bearbeitungs- und Gedankenschritten folgen, ist eine ganz andere Frage. Man kann sie mit den hier zur Verfügung stehenden Daten nicht beantworten.

In der Aufgabengruppe ***HSA-4*** wird ebenfalls durch einen (eher tabellarisch gestalteten) Text und die unmittelbar ins Auge fallende Graphik in HSA-4a ein außermathematischer Kontext aufgemacht, das ***„Freizeitbad Waterworld“***. Die offenbar wohlüberlegt an den Anfang gestellte Aufgabe HSA-3a hat eine durchweg mathematische Bedeutung. Die Struktur der Preisgestaltung in diesem Schwimmbad kann man auch aus der verbalen Information verstehen. HSA-4a will aber, dass die Schülerinnen und Schüler diese Preisstruktur unter der Perspektive des allgemeinen Funktionsbegriff sehen. Dies ist ein mathematisch motivierter Einstieg, der dann in den Aufgaben HSA-4b1 und -4b2 weiter ausgeführt wird. Dabei variieren die beiden Aufgaben systematisch zwischen direkter Aufgabe und Umkehraufgabe.

Die Aufgaben HSA-4c1, -4c2 und -4c3 machen nun allerdings einen zusätzlichen Kontext auf und dabei geht auch die mathematische Kohärenz verloren. Zwar wird in HSA-4c1

[43] Erfreulicherweise gibt es in der ganzen ZP-10 nur noch eine Aufgabe mit diesen eingeschobenen Prozent-Berechnungen, nämlich MSA-Gy-2d1 (vgl. zur Einbettung dieser Aufgabe Kap. 8.4). In der neueren Aufgaben-„Kultur“ findet man leider allzu oft solche Prozentaufgaben als unangeschlossene Zusatzaufgaben. Mit solchen Aufgaben wird nur bei oberflächlicher Betrachtung ein „integratives“ Aufgabenformat im Sinne von Kap. 3.2.2 hergestellt.

noch eine Information aus dem Stamm der Gesamtaufgabe gebraucht, die Fragestellung hat sich nun aber von der Preisstruktur entfernt. In HSA-4c1, wie in den beiden anderen Aufgaben HSA-4c2 und -4c3, kommt der „neue" Kontext zur Geltung und mit ihm die neue mathematische Fragestellung: Rechnungen zu den Besucherzahlen. Aber selbst innerhalb dieses anderen Kontexts besteht keine mathematische Kohärenz: In HSA-4c1 geht es um eine linear-multiplikative Abschätzung, in HSA-4c2 kommt der Begriff „durchschnittlich" ins Spiel und in HSA-4c3 wird eine Prozentrechnung verlangt, allerdings nicht so künstlich hinzugefügt wie oben bei HSA-3c2. Erneut wird für die Aufgaben HSA-4d1 und -4d2 ein vollständig neuer Kontext nachgeschoben; das Schwimmbad „Waterworld" taucht nur noch als Eigenname auf. Die Aufgaben selbst sind einfache Modellierungsaufgaben und hätten als Aufgaben zum grundlegenden proportionalen Denken auch in die Aufgabengruppe über die Basiskompetenzen gepasst.

Insgesamt zeigt sich also, dass Kohärenz in den mathematischen Fragestellungen – im Sinn einer aufbauenden Weiterführung der eingeschlagenen mathematischen Gedanken – in unterschiedlicher Weise in der HSA-Prüfung realisiert ist. Dieses zentrale Merkmal der Aufgabenkonstruktion ist wohl am konsequentesten in der Aufgabe „Maren bastelt Sterne" umgesetzt. Ein verbindender außermathematischer Kontext wird benutzt, um einen mathematischen Gedanken – vom Ausschneiden aus der Pappe zu einer räumlichen Figur – beständig aufbauend weiter zu entwickeln. In den anderen Aufgabengruppen findet sich hingegen noch ein äußerlich angerissener Kontext, aber inhaltliches Aufeinander-Beziehen von mathematischen Aktivitäten der Schülerinnen und Schüler ist nur lokal realisiert.

Es gibt noch eine andere Art, auf mathematische Kohärenz nunmehr in der gesamten Prüfung zu achten. Diese geht von mathematikdidaktischem Wissen über bestimmte Inhaltsbereiche aus. Am Beispiel der Prozentrechnung kann man diese Idee so darstellen: Im Verlauf der gesamten Prüfung kommen an verschiedenen Stellen Aufgaben mit dem Prozentbegriff vor. Es kann nun gefragt werden, ob die bekannten systematischen, stoffdidaktischen Aspekte der Prozentrechnung in der Prüfung abgedeckt sind, wo Lücken bestehen, wo Ergänzungen nötig wären. In der vorliegenden ZP-10-2008 ist der Bereich der Prozentrechnung tatsächlich der einzige engere Stoffbereich, bei dem sich einen solche Frage lohnte. Noch allgemeiner nach Kohärenz gefragt wäre es nämlich, zu untersuchen (im Nachhinein bei der Analyse) oder festzulegen (im Vorhinein bei der Aufgabenkonstruktion), welche weiteren zentralen Stoffgebiete man mit einigermaßen kompletten Gesichtspunkten anschneiden will; die Aufgabenkonstruktion müsste sich dann vorab daran, und nicht an den gewählten außermathematischen Kontexten orientieren.

5.3 HSA-2 – „Krankenversicherung": Das Problem stillschweigend vorausgesetzten Sachwissens

Die Aufgabe HSA-2 – „Krankenversicherung" wirft – jenseits einer möglichen Einzelkritik etwa an der Formulierung bestimmter Teilaufgaben – eine grundsätzliche Problematik aller tatsächlich realitätsbezogenen Aufgaben auf, der man prinzipiell nicht entgehen kann. Da es erklärte Intention – die wir durchaus teilen – des Ministeriums für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen ist, mit solchen Aufgaben auch in zentrale Prüfungen zu gehen, schneiden wir diese Problematik hier an, ohne jedoch eine endgültige Lösung des Gesamtproblems geben zu können.

Realitätsorientierung ernst zu nehmen, bedeutet, dass in der Aufgabe Kontexte angesprochen werden, die nicht nur mit lokalen Informationen bedient werden können, wie sie in den wenigen Zeilen einer „Text"-Aufgabe mitgeteilt werden könnten. Vielmehr muss (jedenfalls idealerweise) die Sache selbst in einem umfassenderen Sinn beim Lösen der Aufgabe für die Schülerinnen und Schüler präsent sein. Am deutlichsten hat das schon vor Jahren Heinrich Winter dargestellt[44]: „Entscheidend ist der Primat der Sache: Sachsituationen sind hier nicht nur Mittel zur Anregung, Verkörperung oder Übung, sondern selbst der Stoff, den es zu bearbeiten gilt. Sachrechnen ist damit *ein Stück Sachkunde* [Hervorhebung J.N. & M.N.]. Die Schüler sollen befähigt werden, umweltliche Situationen durch mathematisches Modellieren klarer, bewusster und auch kritischer zu sehen." (Winter, 1985, S. 31) Und bereits eingangs des Buches betont Winter: Vor allem, „ … und das ist nun der entscheidende Punkt, muss die beschriebene Situation *verstanden* [Hervorhebung im Original] werden, um die Aufgabe im Sinne eines Problemlöseprozesses bearbeiten zu können. Das Verstehen der Situation bedeutet grob gesagt: sie in das Netz des Wissens einzuordnen und im Bewusstsein als strukturierte Ganzheit aufzubauen, und zwar strukturiert auf die Fragestellung hin. Solange der Schüler die Informationen […] nur als Einzelteile erkennen oder wahrnehmen kann, solange ist kein Verständnis da, und damit käme eine richtige Lösung allenfalls zufällig zustande." (Winter, 1985, S. 8)

Das angesprochene Grundproblem wird außerordentlich deutlich sichtbar in der Aufgabe HSA-2 – „Krankenversicherung". Es geht in dieser Aufgabe, von der Sache her betrachtet, um die zeitlichen Veränderungen der Beitragssätze zur Krankenversicherung, wer sie zu bezahlen hat und wie eine Zusatzversicherung Teil des Systems ist. Der Aufgabentext signalisiert, dass man diesen Sachkontext sehr ernst nimmt. Man bedient sich – den deutschen Regelungen zur Krankenversicherung entsprechend – der einschlägigen Fachtermini. Wir finden allein auf dieser einen Seite des Aufgabentexts die folgenden Fachbegriffe:

- Krankenversicherung,
- Beitragssatz (und implizit, dass der Beitragssatz sich zeitlich ändern kann),
- Bruttolohn (aber nicht Nettolohn oder Lohn generell),
- Arbeitnehmer (aber nicht wer es ist, der „die andere Hälfte" des Beitrags zahlt),
- Zusatzversicherung (aber nur, dass sie bestimmte „Arbeitnehmer haben", nicht wer dafür aufkommt).

Ohne es ausdrücklich zu sagen, das ist erkennbar an den in der Aufgabe ausgelassenen Darstellungen bestimmter Funktionalitäten des Systems, wird also von den Schülerinnen und Schülern erwartet, dass sie über genügend Sachwissen über das deutsche Krankenversicherungswesen verfügen.

Andernfalls könnten freilich einige (alle?) Teilaufgaben dennoch gelöst werden. Allerdings liefe dann beispielsweise die Teilaufgabe

> *HSA-2c – „Krankenversicherung"*
> c) Im Jahr 2005 mussten 14 % des Bruttolohns an die Krankenversicherung bezahlt werden. Die Hälfte davon musste der Arbeitnehmer selber zahlen.
>
> Ein Dachdecker hatte einen Bruttolohn von 2 200 €. Wie viel Euro musste er an die Krankenversicherung bezahlen? Notiere deine Rechnung.

auf ein reines, „unverstandenes" (wie Winter sagt, s.o.) Rechnen 14 % * ½ * 2200 € hinaus. Dass man *½ einfügen muss, käme dann nicht aus dem Verstehen der sozialpolitischen Situation, sondern lediglich daraus, dass im Aufgabentext das Wort „die Hälfte" auftaucht.

[44] Dass sich der Titel des Buches von Heinrich Winter auf die Grundschule bezieht, ist hier unerheblich. Es geht um die grundsätzliche Ausrichtung eines realitätsbezogenen Mathematikunterrichts in allen Schulstufen.

Es liegen uns keine Aufgabenbearbeitungen der ZP-10 aus Hauptschulen vor, in denen man nach Indizien für solches unverstandenes Rechnen suchen könnte. Es wäre auch schwer, solche Wissensdefizite in Einzelheiten aus den – naturgemäß kurzen – schriftlichen Dokumenten heraus zu bestätigen, denn Schülerinnen und Schüler schreiben ja eben oft nur die Rechnung hin. Zur Kontrolle haben wir daher – unsystematisch und nicht repräsentativ – durch einen Lehramtsstudenten in den 9. und 10. Realschulklassen einer Schule nachfragen lassen. Die Ergebnisse sind eher ernüchternd, wie es aber auch zu erwarten war: Was Brutto- und Nettolöhne sind, konnte ein Großteil der Schülerinnen und Schüler korrekt sagen. Allerdings wussten viele Schüler nicht, woraus sich die Abzüge zusammensetzen. Allgemein bekannt sind lediglich Lohn- und Einkommensteuern. Viele Schüler scheinen nicht zu wissen, dass es vom Bruttolohn weitere Abzüge gibt; allenfalls wurde die Kirchensteuer genannt, gelegentlich auch die Krankenversicherung, nur einmal die Arbeitslosenversicherung. Völlig unbekannt ist, dass auch die Arbeitgeber Abgaben auf den Bruttolohn zahlen müssen, und wofür. Und eben dies ist der sachliche Hintergrund der Teilaufgabe HSA-2c.

Die Problematik für derartige Aufgaben in zentralen Prüfungen ist nun klar zu umreißen: Auf welches Sachwissen kann man sich bei Schülerinnen und Schüler wirklich verlassen? Wie können Aufgabenentwickler darüber im Voraus Klarheit erhalten? Riskiert man in dieser Situation nicht, dass die angeblich realitätsbezogenen, vielleicht sogar als „authentisch“ angesehenen Aufgaben eben doch nur als eingekleidete Rechenaufgaben gelöst werden *können*? Die Ergebnisse in Form von Prozentzahlen korrekter Lösungen allein können kaum Rückschlüsse über diese Effekte geben. Detailuntersuchungen zum Sachwissen von Schülerinnen und Schülern, genauer: von je spezifischen Gruppen von Schülerinnen und Schülern, gibt es in der Breite nicht. Es könnte aber ein konstantes Element des systematischen Pilotierens von Aufgaben für zentrale Prüfungen werden, vorab Sachwissen bei einer Stichprobe von Schülerinnen und Schüler zu erheben, wenn man beabsichtigt, Aufgaben zu spezifischen authentischen Kontexten zu stellen. Die Aufgabentexte selbst müssten dazu gar nicht frei gegeben werden; es genügt, Schüler-Wissen über einen Kontext auf der sachlichen Ebene zu eruieren.

5.4 MSA-3a und MSA-3c – „Fehlerwahrscheinlichkeiten“: Geringe Verschiebungen ändern den Charakter einer Aufgabe

Die folgenden beiden Aufgaben sind eine markante Demonstration des Effekts, dass bereits kleine Änderungen im Aufgabentext und in der Aufgabenformulierung den kognitiven Charakter (und damit beispielsweise den „Typ mathematischen Arbeitens“ (siehe 3.2.6) aber auch andere Aufgabenmerkmale) entscheidend beeinflussen können. In beiden Teilaufgaben[45] geht es vordergründig darum, Fehlerwahrscheinlichkeiten von einer in eine andere Darstellungsweise umzurechnen. Darstellungen wechseln zu können ist eine in den Kernlehrplänen von Nordrhein-Westfalen erwähnte, allerdings nicht wie in den Bildungsstandards eigens ausgewiesene prozessbezogene Kompetenz. Die Aufgaben stehen in der ZP-10 auf der gleichen Seite untereinander und sind nur durch die kurze Zwischenfrage MSA-3b (im Folgenden nicht abgedruckt) unterbrochen.

[45] Nur die Aufgabe MSA-3c, nicht aber die Aufgabe MSA-3a ist in der ZP-10 für die Gymnasien enthalten.

MSA-3a und MSA-3c – „Fehlerwahrscheinlichkeiten“

In Untersuchungen mit Sportlern wurden Schätzwerte für Fehlerwahrscheinlichkeiten in unterschiedlichen Situationen ermittelt. Ziel war es, mögliche Fehler durch zielgerichtetes Training weitgehend auszuschließen.

	Situation	Fehlerwahrscheinlichkeit
A	Einfache und häufig durchgeführte Aufgabe	0,001
B	oft geübte Aufgabe unter Zeitdruck	0,01
C	schwierige Aufgabe	0,1
D	schwierige Aufgabe unter Stress	0,3

a) In welcher der beschriebenen Situationen tritt die Fehlerwahrscheinlichkeit $1 \cdot 10^{-2}$ auf? Notiere den zugehörigen Buchstaben in deinen Unterlagen.

c) Schwierige Aufgaben unter Stress werden von Sportlern mit einer Fehlerwahrscheinlichkeit von 0,3 ausgeführt. Beurteile, ob die folgenden Aussagen stimmen. Kreuze an.

Das bedeutet, dass	stimmt	stimmt nicht
es in **etwa** 30 % der Fälle zu einem Fehler kommt.		
die Fehlerwahrscheinlichkeit $3 \cdot 10^{-1}$ beträgt.		
30 Fehler gemacht werden.		
in 3 von 10 Fällen **sicher** ein Fehler auftritt.		

In der ersten Aufgabe sind in der rechten Spalte der Tabelle Zahlen im immer gleichen Darstellungsformat – Dezimalbrüche – aufgeführt. Die Lösung der Aufgabe besteht darin, die alternative Zehnerpotenz-Schreibweise einem dieser Dezimalbrüche zuzuordnen. Zur Not kann das auch ein Taschenrechner lösen. Es handelt sich daher um eine „technische“ Aufgabe und um die Anwendung von Standardprozeduren. Ganz anders fällt die zweitgenannte Aufgabe MSA-3c aus. Hier sind Urteile zu fällen, welche der konkreten Situationen auf die Fehlerwahrscheinlichkeit zutrifft. Es sind also Situationen in das vorgegebene mathematische Modell Fehlerwahrscheinlichkeit einzuordnen und es ist schließlich ein Urteil über die jeweilige Situation abzugeben. Auch sind Vorstellungen abzurufen über stochastische Grundbegriffe wie „sicher“ und „etwa“. Rein prozedural kann die Aufgabe nicht mehr bearbeitet werden.

Beide Aufgabentypen haben gleichermaßen ihre Berechtigung in zentralen Abschlussprüfungen

5.5 MSA-4, MSA-Gy-4 – „Hängebrücken“: Das Problem der einzuhaltenden Breite in den Grundvorstellungen zum zentralen Begriff Funktion

Vor einer Analyse der Bearbeitungen dieser Aufgaben durch Schülerinnen und Schüler in Kap. 8.5 und 8.6.5 kann hier auf ein ebenfalls zentrales Problem der Aufgabenstellung hingewiesen werden. Gerade in Abschluss-Prüfungen sollen die Schülerinnen und Schüler u.a. ein hinreichendes mathematisches Grundwissen aus dem Bereich des Mathematikunterrichts in den vergangenen Jahren nachweisen können. Dies verlangt, dass wenigstens die zentralen Begriffe des Mathematikunterrichts in ausreichender Breite vertreten sind, wobei „Breite“ sich nicht nur auf Fertigkeiten beziehen kann, sondern auch die Vielfalt der mit einem Begriff verbundenen Grundvorstellungen (vom Hofe, 1995) meint.

Einer der grundlegenden Begriffe, die im Mathematikunterricht auszubilden sind, ist der der Funktion. Umgehen mit Funktionen kommt daher zu Recht an mehreren Stellen in der Kompetenz-Matrix der Vorgaben des Ministeriums zur ZP-10 (siehe Anhang) vor. Die Aufgabe mit den meisten funktionalen Aspekten ist sicher die vierte Aufgabe in MSA und MSA-Gy. Diese Aufgabengruppe beschäftigt sich mit „Hängebrücken“, genauer den parabelförmigen Formen der Stahlseile solcher Brücken, und einmal mit einer Bogenbrücke, deren Bogen ebenfalls die Form einer Parabel hat.

Es kommen diese quadratischen Funktionen vor:

$$y = -0{,}001875 \cdot x^2 + 5\,, \quad y = 0{,}001875 \cdot x^2 + 5\,, \quad y = 0{,}001875 \cdot x2 - 5\,.$$

$$y = 0{,}002 \cdot x^2 + 3\,, \quad y = -0{,}007 \cdot x^2 + 1{,}3 \cdot x$$

Sie dienen alle einem Zweck: Sie beschreiben eine „statische“ Form eines Seils, bzw. eines Bogens. Zu bearbeiten sind immer gleiche Denkschritte: Setze ein, rechne die Nullstellen aus, verwende ggf. Symmetrien, entscheide über die Form aufgrund der Koeffizienten. Zudem sind diese Schritte bei den vorgegebenen Funktionsgleichungen technisch relativ einfach angelegt, freilich von den Schülerinnen und Schüler nicht immer so erkannt (siehe Kap.8.5).

Damit ist jedoch nur eine Grundvorstellung von „Funktion“ realisiert. Unverzichtbar für ein einigermaßen breites Erfassen des Funktionsbegriffs ist aber wenigstens zusätzlich auch die sog. Kovariations-Vorstellung (vom Hofe, 1995; Malle, 1993): Eine Größe ändert sich im Verlauf der Änderung einer anderen Größe. Diese Vorstellung ist basal für die in der gymnasialen Oberstufe anstehende Analysis (Büchter & Henn, 2009). Dieser Funktionsaspekt kommt in der gesamten ZP-10 nur einmal vor, nämlich in der Aufgabe zur sog. „Schrittmaßregel“ im Basisteil der ZP-10 (MSA-1d, MSA-Gy-1d), und bei dieser Aufgabe steht eher das Probieren denn das begriffliche Erfassen im Vordergrund.

6 Die ZP-10 als Grundlage und Vorbereitung für den Übergang in die Oberstufe des Gymnasiums

Für das Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen sind die Kernlehrpläne und die darin ausgesprochenen Kompetenzerwartungen „nicht nur fachlich relevant, sondern zugleich auch in besonderem Maße bedeutsam für den weiteren Bildungsweg der Schülerinnen und Schüler“[46]. Für den Abschluss der Sekundarstufe I mit dem Mittleren Bildungsabschluss bedeutet das, dass auch der Übergang in die gymnasiale Oberstufe inhaltlich vorbereitet sein soll. Dieser ist nämlich unter der Voraussetzung entsprechender Noten möglich, was im Einzelnen administrativ geregelt ist. Der Mittlere Schulabschluss und damit auch die ZP-10 haben somit eine zusätzliche spezifische Funktion, die Sicherung derjenigen Grundlagen, auf die der Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II aufbauen kann.

Selbstverständlich haben Prüfungen nicht als solche eine derartig vorbereitende Wirkung. Es ist aber zu fragen, ob die vorliegende ZP-10 genug solches Aufgabenmaterial enthält, das anzeigen kann, dass im vorausgegangenen Mathematikunterricht eine hinreichende Grundlage für den späteren gymnasialen Mathematikunterricht gelegt wurde. Zentrale Prüfungen haben bekanntlich normierende Wirkungen auf die inhaltliche und kompetenzbezogene Ausrichtung des Mathematikunterrichts. Die gestellten Aufgaben können also indirekt durchaus etwas über das Problem der Vorbereitung auf die Oberstufe aussagen.

Die Anforderungen, denen die Schülerinnen und Schüler in der gymnasialen Oberstufe ausgesetzt werden, können unter drei Aspekten betrachtet werden,

- der Sicherung mathematischer Fertigkeiten,
- der Bereitstellung von inhaltlichen Grundlagen und
- der Vertrautheit mit spezifischen mathematischen Arbeitsprozessen und den prozessbezogene Kompetenzen.

In allen drei Aspekten ist die ZP-10 nicht so breit angelegt, wie es das Ziel des Übergangs in die Oberstufe erfordert. werden sich gewisse Defizite im Aufgabenmaterial der feststellen lassen, die zu einer zukünftiger Aufgabenzusammenstellungen Anlass geben sollten Überprüfung. Bei dieser Diskussion ist aber zu beachten, dass es keineswegs einzelne Aufgaben, einzelne Stoffelemente, einzelne Festschreibungen im Curriculum sind, die allein bestimmen, wie adäquat ein Übergang vorbereitet ist. Es spielt vielmehr die Einbettung des Mathematikunterrichts in ein Gesamtbild von Mathematik eine entscheidende Rolle; vgl. dazu ausführlicher M. Neubrand (2009).

Es ist das erklärte Ziel der ZP-10, dass *mathematische Fertigkeiten* wie arithmetische Berechnungen, Termumformungen, algorithmisches Lösen von Gleichungen, geometrische standardisierte Konstruktionen etc. immer eingebettet in (meist außermathematische) Kontexte auftreten sollen, weil die ZP-10, wie die Kernlehrpläne selbst, einem „literacy“-Anspruch verpflichtet ist. Fertigkeiten müssen darunter aber nicht automatisch zu kurz kommen. Betrachtet man allerdings die in Kap. 3.2.4, insbesondere in Tab. 3-24, dargestellten realisierten, von Kontexten abstrahierten Stoffgebiete, dann erkennt man, dass etwa das Lösen quadratischer Gleichungen nur in den einfachsten Fällen vorkommt (eine Nullstelle bei 0; fehlendes lineares Glied). Diese Aufgaben sind also offenbar gezielt so konstru-

[46] aus: http://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/lehrplaene/kernlehrplaene-sek-i/einfuehrung/einfuehrung.html.

iert, dass sie Nicht-Standardlösungen ermöglichen sollen. Das verringert zwar zunächst den Anspruch an technische Performanz. Aber die Aufgabensteller wollten offenbar gezielt die Fähigkeit zum adaptiven Verhalten bei der Anwendung von Fertigkeiten betonen und abrufen. Es wird sich aber in Kap. 8 bei der detaillierten Betrachtung von Schülerbearbeitungen herausstellen, dass die Mehrheit der Schülerinnen und Schüler dennoch auf schematische Verfahren zurückgreift (, die dann zudem oft nicht durchgehalten werden).

Dies deutet nicht einfach auf mangelnde technische Fertigkeiten der Schülerinnen und Schüler hin, sondern vor allem darauf, dass mit den Fertigkeiten keine vorab reflektierenden Haltungen ausgebildet werden. Beides, sicheres Beherrschen von mathematischen Algorithmen und die Kompetenz zur Adaption jeweils geeigneter Verfahren, sind Grundvoraussetzungen für die in der gymnasialen Oberstufe behandelten Themen. Insbesondere in der Analysis zielen diese nämlich im Grundansatz auf eine begriffliche Vertiefung der in der Sekundarstufe I zunächst auf der Fertigkeitsebene behandelten zentralen Thematiken, wie etwa den Funktionsbegriff und die Grundidee der Linearität.

Geometrisches Zeichnen und Konstruieren fehlt in den Aufgaben des MSA-Bereichs; nur in der HSA-Prüfung gibt es eine Aufgabe, in der die Schülerinnen und Schüler konkret zeichnen müssen. Auch diese Fertigkeiten sind eine wichtige Grundlage für die gymnasiale Oberstufe, wenn man etwa an die geometrischen Zugänge zum Tangentenbegriff in der Analysis oder das für die Analytische Geometrie unabdingbare räumliche Vorstellungsvermögen denkt.

Was die Bereitstellung von *inhaltlichen Grundlagen* betrifft, sind zwei Facetten zu unterscheiden. Es gibt einerseits die Forderung nach hinreichend breitem mathematischem Wissen, und andererseits die Forderung, dieses Sachwissen in konzeptueller Weise, d.h. eingebettet in größere Zusammenhänge und Vorstellungen, flexibel zur Verfügung zu haben (siehe auch Kap. 4 und 7). Den erstgenannten Gesichtspunkt haben die Kernlehrpläne von sich aus zu sichern. Durch die Vorgaben zur ZP-10 werden aber aus den Kernlehrplänen bestimmte Bereiche ausgewählt, so dass das Spektrum – auch aus Gründen der zeitlichen Beschränkung in einer zentralen Prüfung – relativ klein wird; dieses aber ist immerhin durch den Aufgabensatz der ZP-10 gut abgedeckt.

Deutlicher aber hat sich aber in Kap. 3.2.5 eine konzeptuelle Lücke herausgestellt: Bei den in der ZP-10 vorkommenden Funktionen reicht in der Regel eine „statische“ Vorstellung von Funktion aus: Mit einem Funktionsgraphen kann man die Geometrie einer Hängebrücke beschreiben. In der gymnasialen Oberstufe ist es aber gerade die Kovariationsvorstellung (Malle, 1993; Büchter & Henn, 2009), die das Verständnis der Analysis entscheidend beeinflusst. Dazu gibt es nur die eine Aufgabe zur „Schrittmaßregel“, aber diese provoziert eher probierende Verfahren als ein konzeptuelles Verständnis. Anspruchsvollere geometrische Aktivitäten, vor allem solche, die das Potential der Geometrie zum Durchdringen komplexer logischer Zusammenhänge herausfordern, fehlen in der ZP-10, sind allerdings auch in den Kernlehrplänen nicht sehr stark ausgebildet. Geometrie erscheint dort und in der ZP-10 vorwiegend unter rechnerischen Aspekten.

Mathematische Tätigkeiten, wie beweisen, problemlösen, reflektieren sind zwar in die prozessbezogenen Kompetenzen (Kap. 4.1) der Kernlehrpläne aufgenommen, aber auch dort nicht so betont, wie es für die Grundlegung des Mathematikunterrichts in der gymnasialen Oberstufe erforderlich wäre. Der Begriff „Beweis“ kommt in den Kernlehrplänen nicht zentral vor und es ist daher auch konsequent, wenn die ZP-10 keinen Beweis enthält.

In der ZP-10 sind stattdessen Aufgaben mit der Aufforderung „begründe“ enthalten. Auf diese wird ausführlich bei den prozessbezogenen Kompetenzen eingegangen, auch bei der Besprechung von Schülerbearbeitungen in Kap. 8. Oft reduzieren sich Begründungen auf rechnerische Bestätigungen. Die Begründungen in der ZP-10 pendeln daher zwischen zwei Extremen: Entweder haben sie sehr kleinräumigen Charakter, etwa wenn in der Aufgabe MSA-4 gefragt wird, ob bestimmte Funktionsgleichungen zur vorgegebenen Form des Stahlseils der Hängebrücke passen, und als Antwort allein der Verweis auf einen Koeffizienten genügt. Anderseits werden etwa in der „Korbwurf"-Aufgabe aus der MSA-Gy-Prüfung auf anspruchsvolle Weise Beschreibungen gefordert, dabei aber – sogar in den Auswertungsanweisungen an die Lehrerinnen und Lehrer – nicht klar genug ein begründendes Vorgehen eingefordert. Wie die Schülerinnen und Schüler darauf reagieren, wird in Kap. 8 ausführlich diskutiert. Es scheint ein mittleres, aber dann verpflichtendes und klar eingefordertes Niveau an mathematischen Begründungen in der ZP-10 zu fehlen. Davon könnte man sich auch entsprechende Impulse für den Mathematikunterricht der Sekundarstufe I versprechen.

Insgesamt vermittelt die ZP-10 in Hinblick auf die Frage, ob sie genug Basis legt für den Übergang in die gymnasiale Oberstufe, ein zwiespältiges Bild: Bei durchaus breiten Aufgabenformaten und erkennbaren Intentionen in der Aufgabenstellung werden diejenigen Kompetenzen, die sich auf anspruchsvollere mathematische Prozesse – die Fähigkeit zum adaptiven Verhalten und das Begründen im Besonderen – und auf vorstellungsmäßig breites Wissen zu zentralen Begriffen – insbesondere den Funktionsbegriff – eher vernachlässigt. Dabei könnten gerade von diesen Kompetenzen auch wichtige Impulse für den Mathematikunterricht im Ganzen – nicht nur als Vorbereiter der gymnasialen Oberstufe – ausgehen.

Analysen ausgewählter Schülerbearbeitungen

Vorbemerkung zu den Interpretationen der Schülerbearbeitungen

Die Grundlage der folgenden Analysen ist ein Satz von Schülerlösungen aus den zentralen Prüfungen des Ministeriums für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen im Jahr 2008, die aus den Schulen über das Ministerium zu uns gelangten. Zu den genauen Zahlen siehe Kap.1.3. Zu dieser Stichprobe ist vorab nochmals zu betonen:

In diesen Analysen kann es nicht um irgendeine Art von Repräsentativität der Lösungen für den Gesamtbestand aller Schülerlösungen der ZP-10 gehen. Dazu ist schon die Auswahl der uns zur Verfügung gestellten Schülerbearbeitungen zu wenig kontrolliert. Es geht nämlich von jeder Schule i.a. jeweils eine „starke“, eine „mittlere“ und eine „schwache“ Arbeit in die Analysen ein. Damit ist die Stichprobe systematisch „verzerrt“, tendenziell in Richtung der besseren Schülerinnen und Schüler, wie die Notenverteilung in Abb. 1-6 aufzeigt. Es kann somit nicht auf das Verhalten einer Gesamtpopulation von Schülerinnen und Schülern (in Nordrhein-Westfalen, einer Schulform, usw.) geschlossen werden. In den Tabellen des Kap. 8 verwendete Prozentzahlen beziehen sich immer auf diesen ausgewählten Satz an Schülerlösungen. Solche Prozentzahlen dienen nur der schnelleren numerischen Orientierung innerhalb dieser Stichprobe.

Das Ziel des folgenden Abschnitt ist ein anderes: Anhand der Schülerbearbeitungen lassen sich diejenigen mathematikdidaktischen Probleme der Aufgaben aus der ZP-10 aufzeigen, die nur aufgrund der Bearbeitungen von einzelnen Aufgaben sichtbar werden (können). Das folgende Kap. 7 soll zunächst allgemein aufzeigen, dass auch auf diesem Wege allgemeine didaktische Gesichtspunkte zugänglich werden, und welche Aspekte wir dabei betrachten werden.

7 Mathematikdidaktische Kriterien zur Interpretation von Aufgabenbearbeitungen

Für Interpretationen der Lösungen von Schülerinnen und Schüler können naturgemäß die vielfältigsten Aspekte herangezogen werden. Es besteht die Gefahr, dass man sich in Einzelheiten verliert, obwohl – paradoxerweise – genauere Einsichten in allgemeine mathematikdidaktische Probleme oft erst durch die Betrachtung von individuellen Bearbeitungen einzelner Aufgaben sichtbar werden. Manche grundlegende Problematiken von Aufgaben in zentralen Prüfungen (und auch allgemeiner: in Testaufgaben, in Unterrichtsaufgaben) sind nämlich erst dann präziser aufzuzeigen, wenn man die Aufgabenstellung mit konkreten Bearbeitungen durch Schülerinnen und Schüler konfrontiert.

Um der Gefahr der Beliebigkeit oder gar der Belanglosigkeit vorzubeugen, schicken wir daher einige mathematikdidaktische Gesichtspunkte voraus, an die wir uns bei den folgenden Einzelanalysen von Aufgaben gehalten haben. Es geht um solche Aspekte, die zwar direkt und spezifisch an die jeweils einzeln besprochene Aufgabe geknüpft sind (und ohne diese Verknüpfung auch kaum sichtbar gemacht werden könnten), die aber dennoch Fragen aufwerfen, die verallgemeinerbar sind und mutatis mutandis auch für andere Aufgaben gelten. Es sind dies stets Fragen, die mit den Problemen der Auffassung des Aufgabentextes durch die Schülerinnen und Schüler zu tun haben und vor allem mit den Bedingungen des „Erwerbs intelligenten Wissens“ (Weinert, 1998).

1 Ein erster Gesichtspunkt ist die Frage, inwieweit man bei Schülerlösungen zwischen eher *verständnis*- oder eher *verfahrensorientierter* Bearbeitung differenzieren kann. Dies hat eine Reihe von Aspekten, die man gewissermaßen unter dem Sammelbegriff „Doing of mathematics“ (Stein & al., 1996) subsumieren kann. Dies umfasst das Vorhandensein komplexer mathematischer Denk- und Begründungsaktivitäten, wie z. B. Probleme erkennen und eingrenzen, nach Gemeinsamkeiten suchen, passende Darstellungen wählen, etc.. Jeweils für die einzelne untersuchte Aufgabe sind diese Aspekte zu spezifizieren. Dabei kann auf Folgendes geachtet werden:

– Werden mathematische Verfahren nur schematisch abgearbeitet, oder werden sie eingebettet in einen verständnisvollen Umgang mit Symbolen und Begriffen, etwa indem sich die Schülerinnen und Schüler des Problemlöse- oder Modellierungscharakters der Aufgabe bewusst werden?

  Eine konkrete Ausprägung könnte z.B. sein, ob beim Lösen einer quadratischen Gleichung eine offensichtliche Nullstelle von vorneherein erkannt wird oder ob dennoch schematisch mit der allgemeinen *p*-*q*-Formel gearbeitet wird. – Siehe Analyse der Aufgabe MSA-Gy-4c.

– Wird in einer Schülerbearbeitung sichtbar, dass nicht nur über den Einzelfall, sondern über die allgemeinen strukturellen Hintergründe der Aufgabe nachgedacht und ggf. sogar ein allgemeines Muster („pattern“) erkannt wird?

  Das könnte z.B. im verständigen Gebrauch von Variablen zum Ausdruck kommen, selbst dann, wenn nur ein numerisches Einzelergebnis verlangt wird. – Siehe Analyse der Aufgabe MSA-1c.

– Werden in der konkreten Lösung durch die Schülerinnen und Schüler Erläuterungen gemacht, die – möglicherweise auch fälschlich – eine Anbindung an allgemeine Konzepte erkennen lassen? Wird Wissen mit oder ohne Begründung reproduziert?

  Beispielsweise kann solches Verhalten in einem expliziten Hinweis, es werde nun ein bestimmter Wert berechnet, zum Ausdruck kommen; es kann auch der verbale Hinweis auf einen Begriff genügen. – Siehe Analyse der Aufgabe MSA-1f2.

– Kommt in der konkreten Aufgabenbearbeitung eine Bewusstheit über den Problemlöseprozess zum Ausdruck? Dies kann sachlich richtig oder auch mit falschen Zuordnungen erfolgen.

  Beispielsweise treten solche Gedanken in den Schülerlösungen auf, wenn die Aufgabensteller eine mathematisch-numerische Lösung erwarten, die Aufgabenbearbeitung aber eine im Sachkontext möglicherweise sogar angebrachte schätzende Lösung zeigt. – Siehe Analyse der Aufgabe MSA-Gy-2d2.

– Werden naive Zugangsweisen oder flexible Probierverfahren eingesetzt, die gleichwohl mathematisches Verständnis erfordern?

  In Beispielen kann auch die Weigerung, sich auf probierendes Vorgehen einzulassen, Hinweise auf Verständnisorientierung geben.

– Werden Zahlenangaben in der Aufgabe nach außerhalb des Sachkontextes liegenden Kriterien zu einem scheinbar plausiblen Ergebnis verarbeitet?

  Solche Vorgehensweisen zeigen sich z.B. in den sog. Kapitänsaufgaben. Sie werden aber möglicherweise provoziert durch die spezielle Wahl der Daten und Maße und sind dann auch in zunächst unauffällig erscheinenden Aufgaben zu finden. – Siehe Analysen der Aufgaben MSA-1c und MSA-2b.

2 Ein zweiter Gesichtspunkt ist, die vorliegenden Schülerlösungen in den *Modellierungskreislauf* einzuordnen. I.a. sollen Schülerinnen und Schüler in bestimmten Aufgaben Ausschnitte aus dem vollständigen Modellierungskreislauf bearbeiten. Zur Analyse kann nach den Stationen des Modellierungskreislaufs differenziert werden:

- Das Realmodell wird aufgestellt, etwa indem relevante Information entnommen wird.
- Ein vollständiges und angemessenes mathematisches Modell wird aufgestellt, der vollständige Ansatz wird von den Schülerinnen und Schülern gefunden.
- Das mathematische Modell wird voll durchgearbeitet, die erforderlichen mathematischen Methoden werden auch wirklich ausgeführt. Alternativ dazu wäre, dass ein mathematisches Modell nur beschrieben wird.
- Inwieweit werden die gewonnenen mathematischen Ergebnisse wieder in den Sachkontext rückgebunden und interpretiert, etwa indem das Ergebnis an das Realmodell angepasst wird (beispielsweise durch Wahl passender Maßeinheiten)?
- Gehen die Schülerinnen und Schüler ggf. noch weiter und validieren sie das Modell auf Passung in der Realität?

Bei diesen Aspekten ist man besonders eng an die speziell vorliegende Einzelaufgabe gebunden, denn durch die Aufgabenstellung selbst ist ja die Aufmerksamkeit der Schülerinnen und Schüler schon auf Teile des Modellierungskreislaufs gerichtet.

3 Die Bearbeitungen durch die Schülerinnen und Schüler lassen ggf. auch erkennen, welchen Grad an *technischer Performanz* sie zeigen:

- Werden nur einfache arithmetische Berechnungen mit kleinen oder leicht handhabbaren ganzen Zahlen getätigt? Werden Zahlen in sinnvoller Genauigkeit angegeben?
- Wie ist der Umgang mit Termen und Variablen? Werden Termumformungen sicher beherrscht?
- Werden einfache funktionale Beziehungen (lineare Abhängigkeit, Schlussrechnung) verwendet? Werden mehrschrittige Prozeduren angewendet und inwieweit wird dabei flexibel mit funktionalen und den dabei involvierten algebraischen Beziehungen umgegangen?

Es ist allerdings ein charakteristisch für die ZP-10-Aufgaben, dass technische Performanz als solche nicht im Mittelpunkt des Interesses der Aufgabensteller stand. Es gibt demnach nur wenig Gelegenheit, auf diesen Aspekt detailliert einzugehen, zumal die eigentlich einschlägigen Teilaufgaben aus der Aufgabe MSA-4 vom Kontext überlagert sind.

4 Ebenso ist aber komplementär zur technischen Performanz zu beachten, welche erkennbare Fähigkeiten die Schülerinnen und Schüler zeigen im Umgang mit *mathematischen Begriffen, Definitionen und Konventionen*. Das Spektrum reicht dann

- von der Wiedergabe einfacher mathematischer Definitionen oder Konventionen, ohne deren sinnvollen Einsatz zu prüfen, über
- die Verwendung formaler Definitionen in symbolischer Form, bis zur
- bewussten Anwendung von Regeln, Definitionen, Konventionen, Prozeduren oder Formeln derart, dass vielfältige Beziehungen und allgemeine Konzepte stimmig gebraucht werden.
- Eine letzte Reflexionsstufe ist es, wenn in Aufgabenbearbeitungen mit den innermathematischen Begriffen selbst als Objekten gearbeitet wird.

Eine für diese Aspektegruppe besonders einschlägige Aufgabe ist MSA-Gy-3c.

5 Weiter sind die Aufgabenbearbeitungen der Schülerinnen und Schüler in besonderer Weise – weil gerade die ZP-10 in Nordrhein-Westfalen einer realitätsorientierte Sicht mathematischer Leistung zugewandt ist – durch diese Spannung gekennzeichnet: Sie können sich eng nach dem außermathematischen *Sachkontext* richten, oder sich eher an *formalen bzw. begrifflich durchschauten Lösungsstrategien* orientieren.

- Ist der gezeigte Lösungsweg eher am Sachkontext ausgerichtet, dann sehen wir meist schrittweises Vorgehen und die Zerlegung des Lösungswegs in einzelne Teilschritte, die sich genau nach den gegebenen (numerischen) Größen richten.
- Eine eher formale Ausrichtung zeigt sich oft am Gebrauch von Variablen, so dass im günstigen Fall Aufgabenlösungen zustande kommen, in die auch andere Werte eingesetzt werden könnten, oder die auch für eine Klasse analoger Aufgaben gelten.
- Es liegt jedoch nicht nur am Gebrauch von Variablen, ob der Aufgabenbearbeitung eine strukturelle Zugehensweise zugeschrieben werden kann. Manchmal zeigt sich auch beim kontext-dominierten Vorgehen eine ganzheitliche Strategie, etwa wenn nicht einzelne Teilschritte, sondern eine einzige, (z.B. durch Klammern) gegliederte Rechnung vorgelegt wird.

Die Kriterien dieser Aspektegruppe kann man gelegentlich, z.B. bei MSA-1c oder MSA-2a, an den Aufgabenlösungen beobachten.

6 Schließlich kann man bei den Schülerbearbeitungen auch fragen, ob die Schülerinnen und Schüler sich in den gleichen Kompetenzen (im Sinne der Kernlehrpläne Nordrhein-Westfalen bzw. in Sinne der Bildungsstandards: Blum & al., 2006) angesprochen fühlen wie es den *Intentionen der Aufgabensteller* entspricht. Beispielsweise:

- Fassen Schülerinnen und Schüler eine zum Argumentieren gedachte Aufgabe als reale Modellierungsaufgabe auf?
- Lassen Schülerbearbeitungen auf Lösungsstrategien schließen, die eher für andere als die intendierten Kompetenzen angemessen sind?

Hier treten bei speziellen Aufgaben, etwa bei MSA-Gy-3c oder generell bei den Beschreibungsaufgaben, deutliche Diskrepanzen auf, die ein neues Nachdenken über bestimmte Aufgabenformate nahe legen. Diese Fragestellung geht weit über die ZP-10 hinaus und betrifft grundsätzliche Fragen der Umsetzung von Bildungsstandards in Aufgaben, gleichermaßen für Prüfungen wie für den Mathematikunterricht.

Die genannten sechs Basis-Aspekte, die bei der Verarbeitung von Aufgaben durch Schülerinnen und Schüler zu beachten sind, sind in der aufgezeigten Allgemeinheit selten für alle Aufgaben gleichermaßen anwendbar. Sie geben aber eine Orientierung ab, um spezifizierte Kriterien zur Interpretation zu konstruieren. Hinter allen sechs allgemeinen Aspekten steht die generelle Auffassung, dass mit mathematischen Aufgaben die inhaltlichen und prozessbezogenen Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler angeregt werden können (Bromme & al., 1990) und mit Aufgaben solche Kompetenzen auch zu erfassen sind (J. Neubrand, 2002; 2006; Blum & al., 2006). Die Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler werden sich dann aber vor allem darin zeigen, inwieweit es gelingt, das Wissen „intelligent" (Stern, 2009; Weinert 1998) zu organisieren. Eben dies sollen ja Abschlussprüfungen erfassen.

Zentrale Gesichtspunkte für den Aufbau intelligenten Wissens, das zum Können führt, sind – etwa nach Stern (2009) – die im Einzelnen vielfältigen Prozesse des Chunking /

Bündelns, der flexiblen Automatisierung und des Verstehens durch begriffliche Umstrukturierungen. Stern (2009) bezeichnet diese Prozesse als „Mechanismen, welche dem menschlichen Geist für den Aufbau einer brauchbaren Wissensbasis zur Verfügung stehen“ (Stern, 2009, S. 59). Für die Analyse von zentralen Prüfungen unter mathematikdidaktischen Gesichtspunkten kommt den genannten sechs Basis-Aspekten demnach die Funktion zu, zu prüfen, an welchen Indikatoren die Schülerinnen und Schüler solches „intelligente Wissen“ tatsächlich zeigen bzw. es aufgrund der zu bearbeitenden Aufgaben überhaupt zeigen können.

8 Einzelanalysen von Schülerlösungen - Erkenntnisse aus der Aufgabenbearbeitung

Es werden nun die Einzelanalysen von Aufgaben der ZP-10 wieder aufgenommen, aber unter erweiterten Gesichtspunkten gegenüber Kap. 5. Dort lag der Schwerpunkt auf Problematiken, die sich bereits aus der bzw. für die Aufgabenstellung an sich ergaben, wie etwa die Rolle von Basiskompetenzen, das Problem des stillschweigend vorausgesetzten Sachwissens oder der Anspruch, zu zentralen Begriffen der Mathematik hinreichend vielfältige Vorstellungen in die Aufgaben einzubauen. Nun geht es um die im vorigen Kapitel angegebenen allgemeinen Aspekte, die aber jeweils neu für die Interpretation der Schülerbearbeitungen der jeweiligen Aufgabe auszulegen sind.

Unsere Intention ist es, das Spektrum aufzumachen, dessen man sich bei Bearbeitung von Aufgaben durch Schülerinnen und Schüler gewahr sein muss. Gerade die genaue Beobachtung ausgewählter einzelner Schülerlösungen kann so den Prozess der Aufgabenkonstruktion und der Aufgabenbewertung genauer schärfen, freilich – wie mehrfach betont – unter der Voraussetzung, dass die aufgezeigten Aspekte zentrale Fragen des Umgangs der Schülerinnen und Schüler mit Aufgaben betreffen, eben den Erwerb „intelligenten Wissens“ (im Sinne von Weinert, 1998; Stern, 2009).

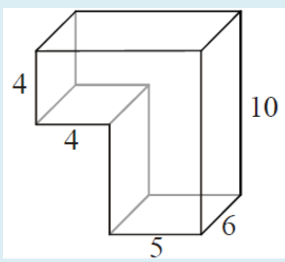
8.1 MSA-1c und MSA-Gy-1c – „Werkstück“: Die erstaunliche Lösungsflexibilität der Schülerinnen und Schüler und das Problem suggestiver Maßverhältnisse

Diese Aufgabe kann man recht gut in die Klasse der Aufgaben einordnen, die Basiskompetenzen im Sinne der Vorgaben des Ministeriums für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen erfassen soll. Grundlegende Fertigkeiten der Volumenberechnung einfacher Körper, namentlich des Quaders, werden nun in einer nur wenig allgemeineren Problemsituation gestellt. Der Kontext bleibt im Kern innermathematisch, wenngleich das Wort „Werkstück“ eine Anwendungssituation andeuten soll. Die elementaren Fertigkeiten der Quaderberechnung kommen nun in einer mehrschrittigen rechnerischen Modellierungsaufgabe vor. Die Schülerinnen und Schüler müssen sich selbst einen Weg suchen, das Werkstück additiv oder subtraktiv aus mehreren Quadern zusammenzusetzen oder es als Prisma über einer L-förmigen Grundfläche zu betrachten. Das Vorgehen beim Mathematisieren ist repetitiv, nicht integrativ (vgl. 3.2.2). Die Aufgabe lautet so:

MSA-1c und MSA-Gy-1c - „Werkstück“

c) Berechne das Volumen des Werkstücks.
Die Maße in der Zeichnung sind in cm angegeben.

Notiere deine Rechnung.



Aufgrund dieser einfachen Charakteristiken ist die Aufgabe weit verbreitet. Sie kommt in vielen Varianten in nahezu allen Schulbüchern vor, tritt immer wieder – sei es in dieser Form oder auch im ebenen Analogon einer L-förmigen Figur aus Rechtecken – in Testaufgaben auf und wird auch immer wieder als Unterrichtsaufgabe genannt, an der man verschiedene Lösungswege mit den Schülerinnen und Schülern sichtbar machen kann. Die

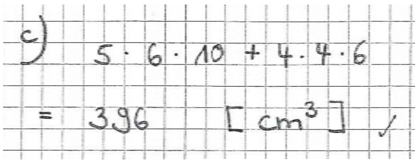
Annahme, dass nahezu alle Schülerinnen und Schüler der Aufgabe in irgendeiner Form bereits begegnet sind, wird durch die vorliegenden Schülerlösungen bestätigt. Die Ergebnisse zeigen nämlich eine gewisse Vertrautheit der Schülerinnen und Schüler mit der Aufgabe. Alle 77 hier beobachteten Schülerinnen und Schüler am Gymnasium haben die Aufgabe bearbeitet. Lediglich 5 von diesen erhielten keinen oder nur 1 Punkt bei der Korrektur, dies sind zwei Lösungen mit Berechnung der Oberfläche und drei Lösungen, bei denen eine der Größen aus der Zeichnung falsch entnommen wurde. Die anderen erhielten 2 oder 3 Punkte, letzteres gilt für 66,2 % im Gymnasium. An den Gesamtschulen ergibt sich ein ähnliches Bild. Bearbeitet wurde die Aufgabe von allen 30 Schülerinnen und Schülern an der Gesamtschule. Sechs davon (20,0 %) erhielten 0 oder 1 Punkt, bei 10 (33,3 %) sind es 2 Punkte, die volle Punktzahl 3 erreichten 14 (46,7 %). In der gesamten repräsentativen Stichprobe des Moduls 2 werden – laut Tab. 2-27 – 55,2 % korrekte Lösungen in der Gesamtschule/Erweiterungskurs und 71,8 % im Gymnasium berichtet.

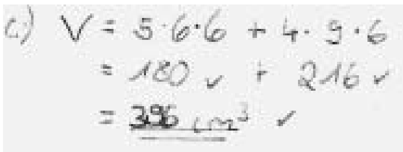
Die Analyse muss sich bei der offensichtlichen Vertrautheit der Schülerinnen und Schüler mit der Aufgabe nicht mit Fragen der formalen Korrektheit oder mit eher oberflächlichen Fehlern aufhalten, zumal auch nur ein offensichtlicher Rechenfehler vorkam. Vielmehr diskutieren wir drei Aspekte, mit denen auf die im letzten Kapitel geschilderten prinzipiellen Zugriffsarten auf Schülerlösungen Bezug genommen wird: Inwieweit Schülerinnen und Schüler die Aufgabe strukturell durchdringen, welche Lösungsvielfalt zu beobachten ist, und das überraschende Auftreten eines sehr speziellen, offenbar auf die gegebenen Maße zurückzuführenden Fehlers.

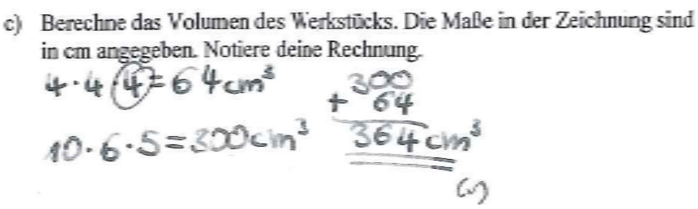
8.1.1 Von Schülerinnen und Schülern eingesetzte strukturelle Hilfen

Inwieweit bei den Schülerinnen und Schüler eine tendenziell strukturelle Herangehensweise an eine Aufgabe oder ein rein schematisches und numerisches Vorgehen nachzuweisen ist (vgl. Aspekte 1 und 5 in Kap. 7), kann aus den Dokumenten nur indirekt an „Indikatoren“ erkannt werden. Ob diese aber wirklich „strukturelles Denken“ anzeigen, bleibt letztlich ungewiss. Hier könnten nur individuelle Nachfragen abhelfen.

Einer dieser Indikatoren ist hier, inwieweit die Schülerinnen und Schüler vor ihren Berechnungen zum Ausdruck bringen, welche Gesamtstruktur sie in der Aufgabe sehen. Die vorliegenden Aufgabenbearbeitungen variieren in dieser Hinsicht beträchtlich. In den beiden ersten Schülerlösungen wird die geometrische Gesamtstruktur des Werkstücks erkannt, und dann sofort auf der konkreten Zahlenebene mit der Berechnung begonnen.





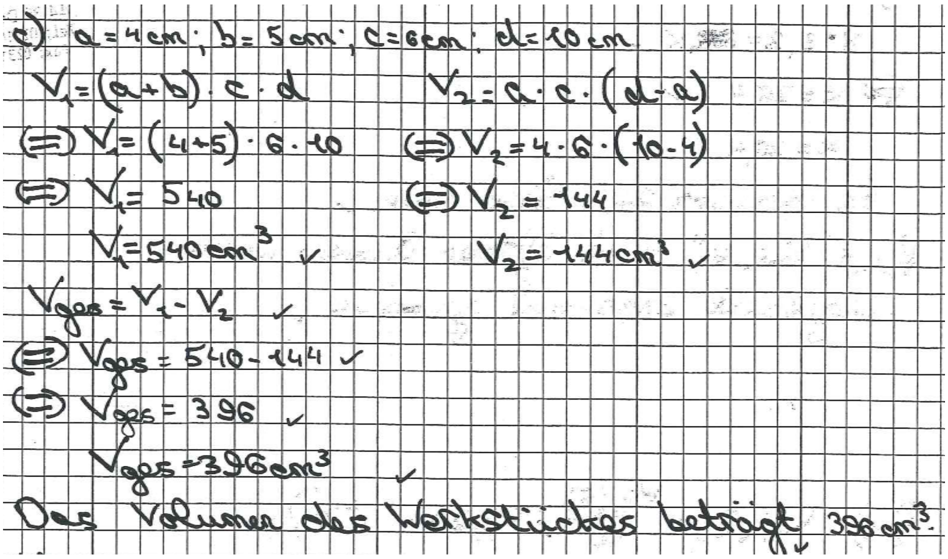


Gymnasium – „befriedigend“

Gesamtschule – „sehr gut“

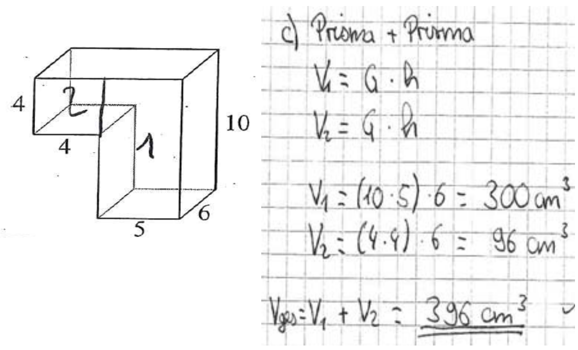
Gesamtschule – „ausreichend“

Es gibt aber auch Lösungen, bei denen die Schülerinnen und Schüler mit Hilfe von Variablen eine noch deutlichere Strukturierung ihrer Lösungsstrategie vornehmen. Das kann auf vielfältige Weise geschehen. Als maximale strukturelle Durchdringung kann man ansehen, dass die Größen in der Skizze als Variablen genommen werden und mit diesen zuerst die geometrischen Beziehungen im Werkstück abgebildet und ggf. sogar algebraisch verarbeitet werden, bevor die Rechnung beginnt. Dies ist ein Beispiel dafür:

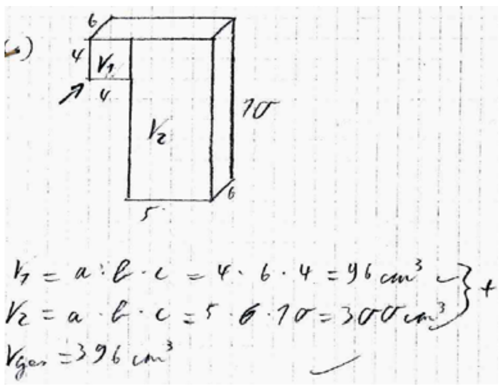


Gymnasium – „befriedigend“

Eine weniger starke strukturelle Durchdringung kann man erkennen, wenn zuerst Formeln in der Art einer Formelsammlung mit Variablen angeschrieben werden und erst dann die Rechnung erfolgt. Der Variablengebrauch kann dabei durchaus inkonsistent sein, etwa indem gleiche Symbole zweifach in unterschiedlicher Bedeutung benutzt werden (Variablen als „Namen“, nicht als Platzhalter für Größen und Werte). Es folgen zwei Beispiele dieser Art.



Gymnasium – „befriedigend“



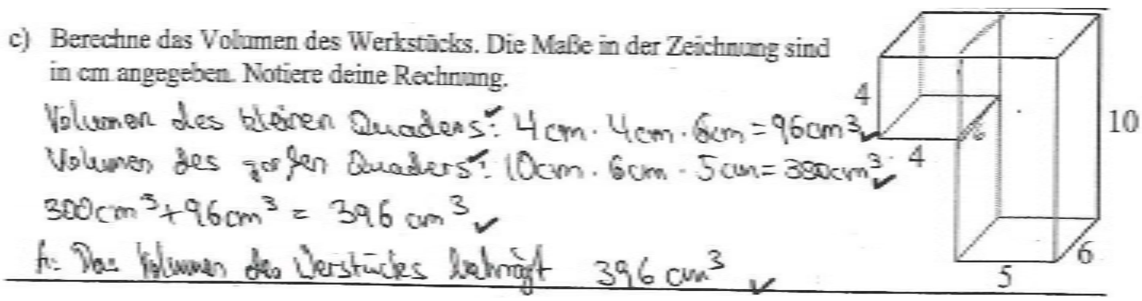
Gymnasium – „befriedigend“

Die folgende Tabelle zeigt die Verteilung dieser Kategorien:

Tabelle 8 – 1. Indikatoren für strukturelle Durchdringung bei der Volumenberechnung.
- MSA-1c – „Werkstück“

strukturell orientierte Vorgehensweisen	Gymnasium		Gesamtschule	
strukturelle Denkweise: allgemeine algebraische Beziehungen (mit Variablen) werden angegeben und dann auf diesen Fall bezogen	3	3,9%	1	3,3%
allgemeine Formel wird abstrakt angegeben (wie aus Formelsammlung). Erst dann werden die Werte für diesen Fall eingesetzt	21	27,3%	15	50,0%
keine allgemeine Formel wird angegeben, sondern die Werte werden direkt rechnerisch bearbeitet. Es wird jedoch auf die Zuordnung der Rechnungen zu den Teilkörpern hingewiesen.	27	35,1%	7	23,3%
Es wird direkt mit der konkreten Rechnung begonnen.	25	32,5%	7	23,3%
andere Vorgehensweise	1	1,3%	0	
gesamt (Auswahl: je eine „starke“, „mittlere“, schwache“ Arbeit pro Klasse)	**77**	**100,0%**	**30**	**100,0%**

Ein anderer Indikator, der eventuell eine strukturelle Durchdringung der Aufgabe anzeigen kann, ist es, ob die Schülerinnen und Schüler Erläuterungen zu ihrem Vorgehen geben oder nicht. Durch solche Erläuterungen kann man evtl. das Vorhandensein einer vorab gebildeten Gesamtstrategie erkennen, auch wenn ein sofortiges Einsetzen der konkreten Zahlen erfolgt, wie in diesem Beispiel:



Gymnasium – „gut“

Erläuterungen und Vorgehensweisen zusammen zeigen, wie die hier ausgewählten Schülerinnen und Schüler mit der Aufgabe unter dem Aspekt einer im weitesten Sinne verständnisorientierten Vorgehensweise umgegangen sind. Die abschließende Tabelle zeigt diese Zusammenhänge.

Tabelle 8 – 2. Von den Schülerinnen und Schülern gegebene Erläuterungen zu ihrem Vorgehen.
- MSA-1c – „Werkstück“

	Gymnasium		Gesamtschule	
Erläuterung vorhanden	ja	nein	ja	nein
strukturelle Denkweise: allgemeine algebraische Beziehungen (mit Variablen) werden angegeben und dann auf diesen Fall bezogen	1 (1,3%)	2 (2,6%)	0	1 (3,3%)
allgemeine Formel wird abstrakt angegeben (wie aus Formelsammlung). Erst dann werden die Werte für diesen Fall eingesetzt	5 (6,5%)	16 (20,8%)	0	15 (50,0%)
keine allgemeine Formel wird angegeben, sondern die Werte werden direkt rechnerisch bearbeitet. Mittels Variablen wird jedoch auf die Zuordnung der Rechnungen zu den Teilkörpern hingewiesen.	3 (3,9%)	24 (31,2%)	0	7 (23,3%)
Es wird direkt mit der konkreten Rechnung begonnen.	3 (3,9%)	22 (28,6%)	0	7 (23,3%)
andere Vorgehensweise	0	1 (1,3%)	0	1 (3,3%)
gesamt (Auswahl: je eine „starke“, „mittlere“, schwache“ Arbeit pro Klasse)	**12**	**65**	**0**	**30**

Man erkennt, dass Erläuterungen nur in wenigen Fällen gegeben werden, in der Gesamtschule gar nicht. Es hängt dies wohl mit dem diesbezüglich üblichen Verhalten in der jeweiligen Klasse zusammen. Insgesamt kann man aus den hier gemachten Beobachtungen schließen, dass es ein permanentes Anliegen des Mathematikunterrichts sein muss, auch bei einfachen Aufgaben strukturelle Gesichtspunkte nicht zu vernachlässigen. Nicht immer greift dies bis in konkrete Lösungen durch, wie Tabelle 8-2 anzudeuten scheint.

8.1.2 Bei Schülerinnen und Schülern beobachtete Lösungsstrategien

In der Strategiewahl sind sich die Schülerinnen und Schüler auf einer oberen Ebene recht einig, bei genauerer Differenzierung aber auch erstaunlich vielfältig im Vorgehen. Über 90 % benutzen eine Zerlegung in zwei Quader, die sie – siehe übernächste Tabelle – in der Regel auch additiv zusammensetzen. Volumenberechnungen durch mehrere Körper kommen nicht vor, ebenso keine anderen (richtigen oder falschen) Volumen-Strategien.

Tabelle 8 – 3. Aufgabe „Werkstück“: Verwendete Lösungsstrategien - Überblick.

verwendete Lösungsstrategien	**Gymnasium**		**Gesamtschule**	
Oberflächenberechnung (! falsche Strategie !)	2	2,6%	0	
Volumenberechnung mit 1 Körper: Zuerst Berechnung des Flächeninhalts der Grundfläche	3	3,9%	0	
Volumenberechnung mit 2 Körpern	72	93,5%	27	90,0%
Volumenberechnung mit 3 Körpern	0		2	6,7%
Andere falsche Strategie	0		1	3,3%
gesamt (Auswahl: je eine „starke“, „mittlere“, schwache“ Arbeit pro Klasse)	**77**	**100,0%**	**30**	**100,0%**

Die von den Korrekturvorgaben favorisierte Lösung, nämlich den Körper als Ganzes als ein Prisma mit L-förmiger Grundfläche anzusehen, also eine Volumenberechnung durch nur einen Körper vorzunehmen, wählen nur 3 der Schülerinnen und Schüler des Gymnasiums. Das ist naheliegend aus einem allgemein-lernpsychologischen Grund heraus, dem wir in unterschiedlichen Varianten im Folgenden mehrfach begegnen werden: Mathematische Begriffe werden von den Schülerinnen und Schülern stets in enger Anlehnung an die „übliche“ Begriffseinführung gesehen. Es dominiert in der Wahrnehmung immer der Zusammenhang, in dem der Begriff ursprünglich gelernt wurde. Hier ist es die Tatsache, dass ein „Prisma“ normalerweise so vorkommt, dass die „Grund“-Fläche wirklich „zu Grunde“, also unten liegt und die „Höhe“ nach oben weist. Will man das Werkstück als Prisma sehen, ist demnach eine Umstrukturierung durch die Schülerinnen und Schüler erforderlich, und diese vermeiden sie natürlich, wenn der Zugang ohne Mühe auch anders erfolgen kann.

Die Korrekturvorgaben heben allerdings genau auf diese Berechnungsmöglichkeit ab. Der großen Mehrzahl der korrigierenden Lehrerinnen und Lehrer wird demnach bei der Korrektur keine andere Orientierung gegeben als der allgemeine Hinweis „wählt einen anderen Lösungsweg, der sachlich richtig ist“; die 3 Punkte müssen demnach frei vergeben werden. Auf die Gesamtbewertung wirkt sich das nicht aus, aber die Unsicherheit in den sog. „Kriterien“, die Pallack & Büchter (2009) konstatieren, könnte auf solche nicht am Normalfall orientierte Lösungshinweise zurückgehen.

Die Volumenberechnung mit zwei Körpern folgt im Einzelnen durchaus unterschiedlichen Strategien. Die Tabelle zeigt aber, dass die additiven Zugangsweisen weitaus dominieren. Man konstatiert aber auch, dass die Schülerinnen und Schüler durchaus ökonomisch vorgehen; zu etwa der Hälfte wählen sie die Art der Teilung, bei der die Werte direkt ablesbar sind. Die subtraktive Lösung wird dagegen nur von 2 Schülerinnen und Schülern gewählt; diese beiden erhielten die Endnoten „befriedigend“ und „mangelhaft“. Aufgrund der geringen Zahlen und der „verzerrten“ Auswahl (s.o.) darf man aber weder hier noch bei den anderen Beispielen aus solchen Ergebnissen allgemeine Schlüsse ziehen.

Tabelle 8 – 4. Aufgabe „Werkstück“: Verwendete Lösungsstrategien mit 2 Körpern - MSA-1c – „Werkstück“

verwendete Lösungsstrategien	Gymnasium		Gesamtschule	
Additionsmethode, Teilung vertikal: Würfel (!falsch!) und Quader	21	27,3%	6	20,0%
Additionsmethode, Teilung vertikal: Quader und Quader (alle Längen können abgelesen werden)	36	46,8%	10	33,3%
Additionsmethode, Teilung horizontal: Quader und Quader (zwei Längen müssen berechnet werden: 4+5, 10-4)	13	16,9%	8	26,7%
Subtraktionsmethode: Gesamtkörper abzüglich Luftraumquader (zwei Längen müssen berechnet werden: 4+5, 10-4)	2	2,6%	3	10,0%
Andere Lösungsstrategie	5	6,5%	3	10,0%
gesamt (Auswahl: je eine „starke“, „mittlere“, schwache“ Arbeit pro Klasse)	**77**	**100,0%**	**30**	**100,0%**

Für die Unterrichtsentwicklung enthält dieses Ergebnis den deutlichen Hinweis, im Mathematikunterricht multiple Lösungswege tatsächlich offen zu halten (Neubrand & Neubrand, 2000). Die Schülerinnen und Schüler gehen offenbar vielfältiger vor, als es den Anschein hat. Und der Gebrauch unterschiedlicher Lösungswege ist gleichermaßen bei Schülerinnen und Schülern des oberen wie des unteren Leistungsspektrums zu erkennen.

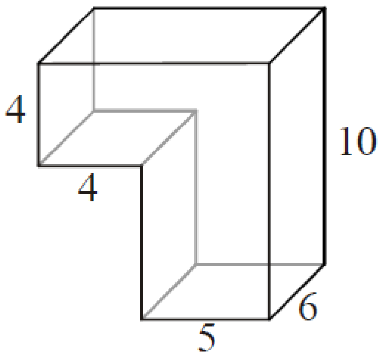
8.1.3 Der Fehler „Würfel“: Suggestive Maßverhältnisse provozieren Fehlurteile

Wie bereits gesagt, fällt diese Aufgabe relativ gut aus. Es gibt 26 (33,8%) falsche Ergebnisse unter den 77 Schülerinnen und Schüler am Gymnasium und 16 (53,3%) falsche Ergebnisse bei den 30 Schülerinnen und Schüler aus Gesamtschulen. Aber ein Fehler dominiert bei weitem. Mit nur 2 Ausnahmen im Gymnasium und bei allen 16 fehlerhaften Lösungen in den Gesamtschulen resultieren die Fehler aus der falschen Entnahme der Daten für den Teilkörper links oben: Er wird als Würfel angesehen, wie die Tabelle zeigt:

Tabelle 8 – 5. Das Volumen des linken Teiles des Werkstücks wird mit 4*4*4 berechnet - MSA-1c – „Werkstück“

„Würfel“-Fehler	Gymnasium		Gesamtschule	
ja / Anteil an allen Schülerinnen und Schülern der Auswahl	24	31,2 %	16	53,3 %
alle gemachten Fehler / Anteil des Würfelfehlers daran	26	93,2 %	16	100,0 %

Das häufige Auftreten dieses einen Fehlers ist auffällig. Betrachtet man die Figur nochmals genau, dann erkennt man den naheliegenden Grund dafür:



Zwei Wahrnehmungseffekte sind zu beachten. Subjektiv erwarten die Schülerinnen und Schüler das übliche Verkürzungsverhältnis von 0,5 im Schrägbild. Da die Kante mit der Maßzahl 5 auf dem Aufgabenblatt mit 1,3 cm gedruckt ist (obige Figur ist vergrößert), müsste die Kante mit der Maßzahl 6 mit einer Länge von 0,5 * 1,56 cm erscheinen. Das tut sie auch in angemessener Genauigkeit mit etwa 0,75 cm. Bei diesen kleinen Längen ist aber diese Kante nicht mehr von einer zu unterscheiden, die der Länge 5 entspräche und mithin im Bild 0,65 cm lang sein müsste. Der Teilkörper links oben sieht demnach – vor allem dann, wenn Hilfslinien eingefügt sind – dem Schrägbild eines Würfels täuschend ähnlich.

Der in der Größenordnung von einem Viertel der Schülerinnen und Schüler gemachte Fehler geht also ganz erheblich auf die Aufgabenstellung selbst zurück, genauer auf die Auswahl der speziellen Maße. Wenn es also das Ziel der Aufgabensteller war, die Fähigkeit zur Zerlegung einer zusammengesetzten Figur zu erfassen, dann sollte sich diesem Ziel auch die Wahl der Maße unterordnen.

8.2 MSA-1f und MSA-Gy-1f – *„Einen Quader werfen“*: Interferenzen von Lösungen mit dem mathematischen Hintergrund und dem Erwerbskontext von Begriffen

Wie die soeben behandelte Aufgabe zur Bestimmung des Volumens eines Werkstücks gehört auch die Aufgabe MSA-1f bzw. MSA-Gy-1f zum Prüfungsteil 1. Es sollen mit dieser Aufgabe also ebenfalls „Basiskompetenzen“ erfasst werden. Der Intention der Aufgabensteller, auch wichtige Konzepte aus der Stochastik („Gesetz der großen Zahl“) – und allgemeiner: überhaupt die Kenntnis zentraler Begriffe des mathematischen Curriculums – ebenfalls als „Basiskompetenzen“ anzusehen und zu prüfen, ist zuzustimmen. Diese Auffassung wird auch durch die Bildungsstandards gedeckt, die das inhaltliche Wissen in mathematische Leitideen gliedern, „um Verständnis von grundlegenden mathematischen Konzepten zu erreichen“ (KMK, 2003, S.13). Jedoch kommt es gerade bei dieser Intention darauf an, dass die Aufgaben fachlich so gestellt sind, dass die Schülerinnen und Schüler ihre Kenntnisse über Basiskonzepte einsetzen können.

Die folgenden Analysen werden zeigen, dass es sich bei der Aufgabe „Einen Quader werfen“ um eine hochkomplexe Aufgabe handelt. Das Kernproblem ist, inwieweit sie begrifflich an das Vorwissen der Schülerinnen und Schülern anschließt. Insofern wirft die Aufgabe aufgrund ihrer inhaltlichen Gestaltung ein zentrales Problem auf, das für jede Aufgaben-Konstruktion bei mathematischen Tests gilt, nämlich die Frage nach der inhaltlichen Angemessenheit des Aufgabenkontextes.

Es handelt sich hierbei um eine Frage genuin mathematikdidaktischer Art, die mathematische, vor allem aber auf die Kognitionen der Schülerinnen und Schüler bezogene Aspekte hat: Kommen Begriffe in einer Aufgabe in der Weise vor, dass ein kanonischer Inhalt mathematisch angemessen und vor allem innerhalb stimmiger Kontexte zum Aufgabengegenstand wird? Formale Korrektheit allein ist aus dieser Perspektive nicht genug. Es muss hinzukommen, dass die Schülerinnen und Schüler mit dem in der Aufgabe angeschnittenen Problemkontext so umgehen können, dass sie ihr im Mathematikunterricht aufgebautes Verständnis des fraglichen Begriffs sinnvoll benutzen können. Die Frage wird insbesondere in Abschlussarbeiten wie der ZP-10 virulent, in denen bewusst an die Kontexte des jeweiligen Wissenserwerbs in der Schule angeschlossen werden soll.

Den ersten Teil der gestellten Frage – inhaltliche Angemessenheit – hätte man auch unter dem Aspekt der Aufgabenstellung verhandeln können. Für den zweiten Teil – Anknüpfung an den Erwerbszusammenhang – wird sich aber zeigen, dass die Bearbeitungen der Schülerinnen und Schüler tatsächlich belegen, dass inhaltliche Passung von Aufgabenkontext und zu erfassendem Begriff ein zentrales Qualitätskriterium von Aufgaben ist. Nicht-Passung kann spezifische Fehler provozieren. Erst zusammen mit den Schülerlösungen ist die Tragweite der genannten Problematik also deutlich zu erfassen.

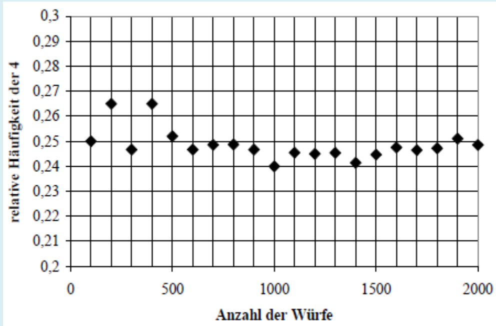
Die Aufgabe lautet in der ZP-10 so:

MSA-1f - „Einen Quader werfen“

f) Ein mit den Zahlen „1“ bis „6“ beschrifteter Quader wurde insgesamt 2 000-mal geworfen. Das Diagramm zeigt die relative Häufigkeit des Wurfergebnisses „4“ nach 100, 200, 300, 400 usw. Würfen.

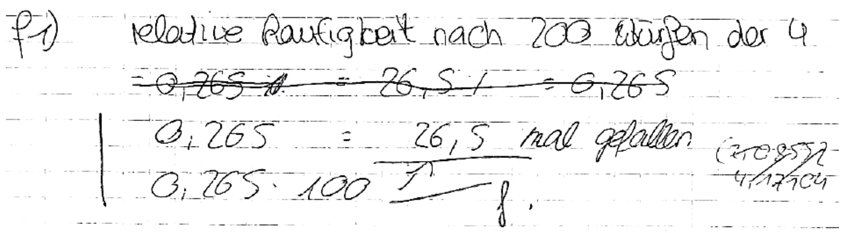
f1) Wie oft ist die „4“ bei 200 Würfen gefallen? Notiere deine Rechnung.

f2) Gib mit Hilfe des Diagramms einen Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit an, dass bei dem benutzten Quader eine „4“ fällt.



8.2.1 Inhaltlicher Kern der Aufgabe

Die Aufgabe „Mit einem Quader würfeln“ verlangt im ersten Teil das Ablesen eines Wertes für die relative Häufigkeit, eine „4“ zu würfeln, und daraus die Berechnung der tatsächlich in diesem Experiment numerisch-absolut beobachteten Würfe mit Ausfall „4“. Insoweit ist die Aufgabe unproblematisch. Es soll durch sie auf den Unterschied zwischen absoluter und relativer Häufigkeit verwiesen werden, also auf zwei zentrale Konzepte des Stochastikunterrichts. In der Tat ergeben sich in den Schülerlösungen die zu erwartenden konzeptuellen Probleme, z.B. in der folgenden Bearbeitung die Vorstellung, man rechne die relative Häufigkeit konstant mit 100 auf die absolute Häufigkeit hoch,


f1) relative Häufigkeit nach 200 Würfen der 4

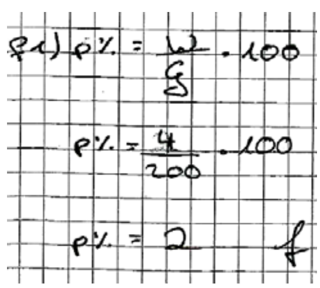
~~0,265 % = 26,5 % = 0,265~~

0,265 = 26,5 mal gefallen

0,265 · 100 f

Gymnasium – „ausreichend“

oder bei der folgenden Lösung sogar die Verwechslung des Ausfalls „4“ mit dem numerischen Wert „4“ (und eine schematische Zugehensweise auf Aufgaben aus der Prozentrechnung):


$$f1)\ p\% = \frac{W}{G} \cdot 100$$

$$p\% = \frac{4}{200} \cdot 100$$

$$p\% = 2 \quad f$$

Gymnasium – „ausreichend“

Dieser erste Aufgabenteil ist kognitiv unproblematisch; er zeigt die zu erwartenden Ergebnisse. Eine genauere Analyse der vorkommenden Fehler wäre dennoch von Interesse, übersteigt aber Rahmen und Möglichkeiten dieses Gutachtens. Im Wesentlichen wird man hier bei der auch an vielen anderen Aufgaben diskutierbaren Problematik des relationalen

Zahlverständnisses (siehe auch Kap. 3.2.5) ankommen. Die Aufgabenstellung dieser ersten Teilfrage ist allerdings nicht allzu tief auf begriffliches Eindringen in den Unterschied zwischen relativen und absoluten Häufigkeiten bezogen.

Eine in den mathematikdidaktischen Konsequenzen viel tiefer gehende Problematik macht hingegen der zweite Aufgabenteil auf. Er fokussiert inhaltlich auf die Vorstellungswelt des „Empirischen Gesetzes der großen Zahl". Man kann es etwa so fassen: „Mit wachsender Versuchszahl stabilisiert sich die relative Häufigkeit" (Haftendorn, 2010, S. 242). Zur Kenntnis dieses Gesetzes gehört zudem wesentlich, dass man das Sich-Stabilisieren nicht mit irgendeiner Art von Konvergenz verwechseln darf, denn auch bei hohen Versuchszahlen treten immer wieder größere Abweichungen auf (Kütting, 1994, Henn & Büchter, 2007).

Zum Gesetz der großen Zahl gibt es typischerweise zwei Zugangsweisen. Den ersten und wohl unmittelbarsten Zugang wählen die Schulbücher in der Regel, und fast alle didaktisch orientierten Stochastik-Bücher empfehlen ihn (Kütting, 1994; Henn & Büchter, 2007); dieser Weg dürfte folglich auch in den meisten Klassen der ZP-10 beschritten worden sein: Man macht mehrere unabhängige(!) Versuchsserien mit immer größeren Versuchszahlen und beobachtet die Stabilisierung der relativen Häufigkeiten. Flankierend kann man auch noch mehrere unabhängige(!) Versuchsserien mit gleicher Versuchsanzahl durchführen, um auf die zunehmend geringere Streuung der relativen Häufigkeiten mit steigender Versuchszahl aufmerksam zu werden. Das ist das auch graphisch leicht umsetzbare und damit sehr suggestive Programm etwa bei Haftendorn (2010, S. 243) und analog in vielen von uns herangezogenen Schulbüchern. Es ist davon auszugehen, dass an dieser Situation, also an diesem „Erwerbszusammenhang" (Baumert & Kunter, 2006, s.u.), die Schülerinnen und Schüler das Gesetz der großen Zahl kennen gelernt haben.

Der alternative Zugang über kumulierte relative Häufigkeiten, den Eichler & Vogel (2009) beschreiten, ist komplexer und schwerer zu durchschauen. Für Eichler & Vogel steht auch etwas anderes im Vordergrund: Es ergibt sich auf diese Art und Weise ein Weg, tiefer in die Reflexion über stochastische Modellierungsprozesse einzusteigen. Gerade, weil dieser Weg so komplex ist, führt er zu Reflexionen über die (Meta-)Begriffe Prognose und Hypothese und deren Überprüfung bzw. zum Nachdenken über die Funktionen eines Modells der realen Vorgänge. Diese Reflexionsfunktion kann aber eine Prüfungsaufgabe nicht übernehmen.

Im Folgenden wird sich ergeben, dass überdurchschnittlich viele Schülerinnen und Schüler, und zwar unabhängig von ihrer jeweiligen Endbenotung, den gleichen „Fehler" machen, nämlich auf eine Argumentation über den Mittelwert der aufgezeichneten relativen Häufigkeiten auszuweichen. Mittelwertbildung ist im erstgenannten Zugang – unter bestimmten Umständen, z.B. in den Graphiken bei Haftendorn, 2010, S. 243 – angebracht. Im zweitgenannten Zugang macht sie keinen Sinn, denn bei Mittelwertberechnung würde man ja die Abweichungen in den ersten Fällen immer wieder erneut ins Kalkül ziehen. Diese Abweichungen hätten einen stärkeren Einfluss als die folgenden Abweichungen.

Die Aufgabe selbst favorisiert nun allerdings durch den Aufbau der Graphik eindeutig den Zugang über die kumulierten Häufigkeiten. Bereits im Stamm der Aufgabe (unter f) wird das Experiment unzweifelhaft beschrieben: „… insgesamt 2000-mal" wird der [ein und derselbe] Quader geworfen, und die Ausfälle „4" werden „nach 100, 200, 300, 400, usw. Würfen" [also jeweils zwischendurch] in ihrer relativen Häufigkeit in der Graphik aufgetragen. Teilaufgabe f 1 betont diesen Zusammenhang erneut. Es geht um eine einzige Wurfserie, nur unterbrochen zu Zwischenzählungen. Das Experiment wird also eindeutig im Sinne „kumulierter relativer Häufigkeiten" (Eichler & Vogel, 2009, S. 161) ausgewertet. Darauf müssen sich die Schülerinnen und Schüler einstellen.

Es gibt demnach, in Kenntnis des Gesetzes der großen Zahl, dessen Konsequenzen von den Schülerinnen und Schülern ja gerade erfragt werden soll, nur eine rational-sinnvolle Antwort: Die höchste Anzahl an Würfen liefert die beste Information, die man in dieser Situation haben kann. Das Ablesen dieses einen, oder ggf. eines benachbarten Wertes ist also die korrekte Lösung. In Gestalt einer Schülerlösung stellt sich diese Antwort z.B. so dar:

f2) 0,248 = 24,8%
Zum Ende hin stabilisiert sich die Wahrscheinlichkeit immer mehr, deshalb habe ich einen der hinteren Werte gewählt. ✓

Gymnasium – „sehr gut“

Eine Antwort dieser Art wird in den Korrekturvorgaben der ZP-10 erwartet. Allerdings wird dort nicht auf die Begründung oder Herkunft des Ergebnisses eingegangen. Es gibt die 2 Punkte auf dieses Kriterien: „Der Prüfling entnimmt dem Diagramm die relevanten Daten“ und antwortet etwa so: „Der Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit der „4“ liegt bei 0,25. (Akzeptiert werden Werte zwischen 0,245 und 0,255)“. Die Aufgabe wird in der hier betrachteten Stichprobe wie folgt bewertet:

Tabelle 8 – 6. Bewertung (Schüleranzahlen und Prozent)
- MSA-2f2 und MSA-Gy-2f2 – „Mit einem Quader würfeln“

Vergebene Punktzahlen	Gymnasium		Gesamtschule/ Erweiterungskurs	
0 Punkte	26	35,1%	13	43,3%
1 Punkt	3	4,1%	0	
2 Punkte	45	60,8%	17	56,7%
gesamt [47] (Auswahl: je eine „starke“, „mittlere“, schwache“ Arbeit pro Klasse)	**74**	**100,0%**	**30**	**100,0%**

Die Aufgabe liefert also in Gymnasium und Gesamtschule nahezu gleiche Resultate in den Bewertungen der Lehrerinnen und Lehrer. Von den Schülerinnen und Schülern, die 0 Punkte erreicht haben, haben in der Gesamtschule 9 Schülerinnen und Schüler (30 % von allen) die die Aufgabe nicht bearbeitet, im Gymnasium nur 7 (9,1% von allen).[48]

8.2.2 Passung des Begriffskontextes

Aus der Sicht der Schülerinnen und Schüler ergibt sich bei der Lösung der zweiten Teilaufgabe eine eigenartige Lage: Wenn ihr Begriff vom „Gesetz der großen Zahl“ durch die Vorstellung einer Stabilisierung immer länger werdender, aber unabhängiger(!) Versuchs-

[47] Bei drei Schülerbearbeitungen sind die Korrekturprotokolle der Korrektoren nicht beigeheftet. Die Merkmale der Schülerlösungen können also entnommen werden (dort: N=77), aber i.a. nicht die genaue Bepunktung durch die Lehrerinnen und Lehrer. Daher ist bei Tabellen mit Punktbewertung i.a. nur der Bezug auf 74 (= 100 %) Schülerinnen und Schülern möglich.

[48] Die Zahlen beziehen sich wie bisher in diesem Kapitel nur auf die wenigen ausgewählten komplett vorliegenden Schülerlösungen; sie differieren daher gegenüber den Zahlen aus dem Datensatz „Modul 2“ (vgl. Tab. 2-27); dort haben 71,7 % der Gymnasiasten und 47,0 % der Schülerinnen und Schüler aus den Gesamtschulen/Erweiterungskurs die Aufgabe vollständig gelöst.

reihen geprägt ist, also durch die oben als häufigsten Zugang beschriebene Einbettung des Gesetzes der großen Zahl, dann ist es eine erhebliche Leistung, nun davon zu abstrahieren und sich nun auf den einen letzten und aussagekräftigsten Wert zu verlassen. Diese eigenartige Lage der Schülerinnen und Schüler wird noch verstärkt dadurch, dass die ihnen möglicherweise bekannten graphischen Darstellungen identisch aussehen, wie die in der Aufgabe gezeigte Graphik. Es muss lediglich die Anlage des Zufallsexperiments im Aufgabentext anders beschrieben sein.

Damit erkennt man eine grundsätzliche Schwierigkeit jeder Aufgabenbearbeitung: „Lernen ist […] ein idiosynkratischer Prozess […]. Verständnisvolles Lernen erfolgt […] stets situiert und kontextuiert. Der Kontext strukturiert und formt den Lerngegenstand selbst. Dies gilt in besonderem Maße für artifizielle Lerngelegenheiten, wie sie die Schule typischerweise anbietet. Wissen wird unvermeidlich in sozialen Situationen erworben und trägt gleichsam den Index des sozialen Erwerbszusammenhangs an sich“ (Baumert & Kunter, 2006, S. 477). Sinnvoll zu ergänzen ist man, dass es nicht nur um den sozial-situativen, sondern auch um den inhaltlich-situativen Erwerbszusammenhang geht; auch dieser „hängt wie ein Index“ an den erlernten Begriffen (vgl. Sfard, 2003: The need for Structure).

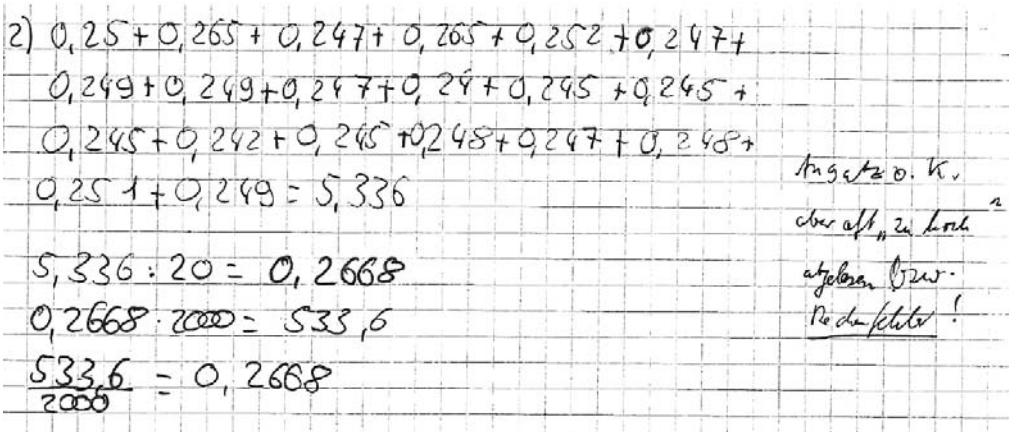
Ist nun der Zugang, der „Erwerbszusammengang“, zum Gesetz der großen Zahl durch Stabilisierung bei unabhängigen(!) Versuchsreihen geprägt, ist die Methode Mittelwertbildung nicht nur naheliegend, sondern geradezu vorprogrammiert. Und dies bestätigt sich in den Daten (Tab. 8-7).

Tabelle 8 – 7. Strategien bei der Aufgabe MSA-1f2 – „Einen Quader werfen“. Anzahlen von Schülerinnen und Schülern:

verwendete Lösungsstrategien	Gymnasium		Gesamtschule	
Mittelwertbildung über mehr als die beiden letzten Werte (Rechnung oder verbale Beschreibung)	15	19,5%	4	13,3%
Mittelwertbildung nur über die beiden letzten Werte	0		0	
anderes falsches Argument	5	6,5%	3	10,0%
richtiges Argument	4	5,2%	0	0,0%
keine Argumentation	46	59,7%	14	46,7%
Aufgabe nicht bearbeitet	7	9,1%	9	30,0%
gesamt (Auswahl: je eine „starke“, „mittlere“, schwache“ Arbeit pro Klasse)	**77**	**100,0%**	**30**	**100,0%**

Die Tabelle kann dabei nur die Schülerstrategien anzeigen, die auch wirklich angeschrieben wurden. Zusätzlich wird sich die Fehlvorstellung „Mittelwertbildung“ auch bei einigen der relativ vielen Schülerinnen und Schüler vorfinden, die gar keine Argumentation lieferten. Es ist in der Aufgabe ja nicht ausdrücklich eine Begründung verlangt.

Das Verfahren der Mittelwertbildung kommt in zahlreichen Varianten vor. Es gibt ausführliche Mittelwertberechnungen, wobei das folgende Beispiel zusätzlich die Uneinigkeit bei der der Korrektur zeigt, denn die Lösung wurde, wie ablesbar, zunächst als richtig mit 2 Punkten bewertet, aber dann in der Nachkorrektur auf 1 Punkt gesetzt, wobei sich die Kritik darauf bezieht, dass das akzeptierte Lösungsintervall überschritten wurde.



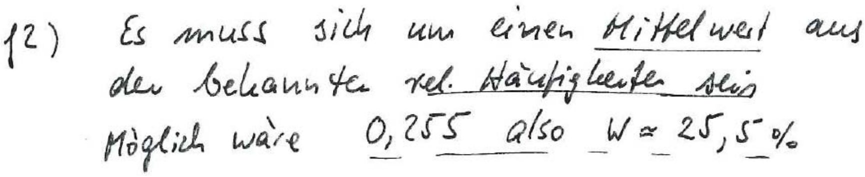
2) 0,25+0,265+0,247+0,265+0,252+0,247+
0,249+0,249+0,247+0,24+0,245+0,245+
0,245+0,242+0,265+0,248+0,247+0,248+
0,251+0,249 = 5,336

5,336 : 20 = 0,2668
0,2668 · 2000 = 533,6
$\frac{533{,}6}{2000}$ = 0,2668

Ansatz o.k. aber oft „zu kurz“ abgelesen bzw. Rechenfehler!

Gymnasium – *„befriedigend“*

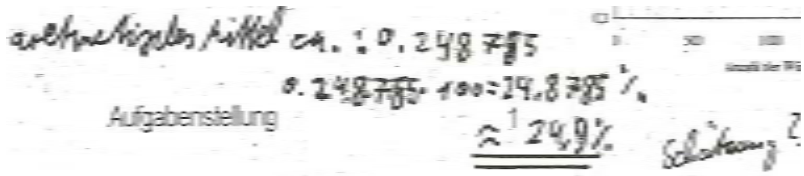
Es gibt aber auch Lösungen, die die Mittelwertbildung nur als Strategie angeben, dann aber zu einer Schätzung übergehen, wie hier:



(2) Es muss sich um einen Mittelwert aus den bekannten rel. Häufigkeiten sein
Möglich wäre 0,255 also W ≈ 25,5 %

Gymnasium – *„gut“*

Die Lehrerinnen und Lehrer sind sich indes, da ihnen in den Korrekturanweisungen, wie erwähnt, keine Orientierungshilfe gegeben wird, uneins über die Bewertung des Mittelwert-Ansatzes. Sie akzeptieren ihn, wie oben, monieren allenfalls Rechenfehler, oder es erfolgen unsichere Bemerkungen wie im folgenden Beispiel („Schätzung?“). Hier wird zwar angemerkt, ob denn die Berechnung des arithmetischen Mittels (offenbar mit Taschenrechner) noch eine „Schätzung“ sei, aber dennoch die volle Punktzahl gegeben.



arithmetisches Mittel ca. 0,248785
0.248785 · 100 = 24,8785 %
Aufgabenstellung
≈ 24,9 % Schätzung?

Gesamtschule – *„sehr gut“*

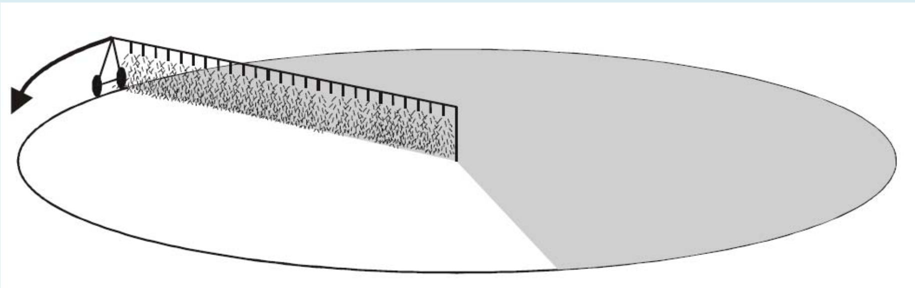
8.2.3 Konsequenzen für die Aufgaben-Konstruktion

Das beschriebene zentrale Problem der Passung von mathematischen Begriffen zu Aufgabenzusammenhang und schulischem Erwerbszusammenhang provoziert ein Lösungsverhalten der Schülerinnen und Schüler, das nur wenig über das tatsächlich vorhandene Wissen aussagen. Solche aufgabenseitig hervorgerufenen Fehlvorstellungen sollten möglichst vermieden werden; sie sind freilich niemals vollständig auszuschließen, wenn man Lernen als selbstgesteuerten Prozess wirklich ernst nimmt. Aber Aufgabenkontexte sollten möglichst so auf Begriffe zugreifen, dass Kohärenz zu den curricular geläufigsten Zugängen erhalten bleibt. Es ist insbesondere darauf zu achten, dass nicht äußere Ähnlichkeiten in Aufgabentexten vorkommen, die auf andere Begriffszugänge abheben, wie bei der besprochenen Aufgabe eben die identisch auch für andere Bedeutungen brauchbare Graphik.

Die zweite Konsequenz bezieht sich auf die Korrekturvorgaben. Diese sollten offensichtlich mögliche alternative Denkweisen der Schülerinnen und Schüler antizipieren. Die korrigierenden Lehrerinnen und Lehrer müssen genauere Orientierungen haben, wie sie mit zu erwartenden Fehlvorstellungen umgehen sollen.

8.3 MSA-2b und MSA-Gy-2a – „Geschwindigkeit Wasserarm“: Umgehen mit komplexen funktionalen Zusammenhängen

Der zweite Prüfungsteil beginnt sowohl in der MSA- wie in der MSA-Gy-Prüfung mit einer Aufgabe, die die geometrischen Teile des Curriculums abdecken soll. Die erste Teilaufgabe in der MSA-Prüfung beinhaltet eine einfache Flächenberechnung (die bewässerte Kreisfläche), die man nach den Vorgaben des Ministeriums für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen am ehesten in den 1. Prüfungsteil (Basiskompetenzen) einordnen kann (Bestimmung von Flächeninhalten einfacher Figuren, u.a. Kreis). Diese Aufgabe fehlt in MSA-Gy. Die jetzt besprochene Aufgabe MSA-2b bzw. MSA-Gy-2a behandelt im geometrischen Kontext eine Frage, die gemäß den Vorgaben des Ministeriums allerdings am ehesten zur Behandlung von Weg-Zeit-Zusammenhängen, also in den Inhaltsbereich Funktionen, gehört. Es geht im Kern um Geschwindigkeiten und ihre Angabe in geeigneten Maßen, wobei auch der geometrische Kontext eine Rolle spielt. Die Aufgabe ist so gestellt:

> *MSA-2b bzw. MSA-Gy-2a - „Geschwindigkeit Wasserarm“*
> Auf vielen Getreidefeldern in den USA werden wegen der Trockenheit im Sommer Bewässerungsanlagen eingesetzt. Sie sind im Mittelpunkt fest montiert und lange „Arme“ mit Wasserrohren fahren auf großen Rädern kreisförmig über die Felder (siehe Abbildung).
>
> 
>
> Farmer Jackson setzt Anlagen ein, die jeweils eine Armlänge von 225 m haben.
>
> a) Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich der äußere Endpunkt eines solchen Wasserrohres, wenn die Anlage drei Umdrehungen in einer Stunde macht? Gib die Geschwindigkeit in km/h an. Notiere deine Rechnung.

8.3.1 Eine „machbare“ Aufgabe?

Die Aufgabe scheint bei den Schülerinnen und Schüler als „machbar“ zu gelten, denn lediglich 1 von den ausgewählten 77 Gymnasiasten in der Stichprobe und nur 3 von den 30 Schülerinnen und Schülern aus den Gesamtschulen bearbeiten die Aufgabe nicht. Eine detaillierte Analyse der Bearbeitungen wird aber dennoch eine Reihe von charakteristischen Schwierigkeiten aufzeigen. Diese verweisen vor allem darauf, dass bei der Aufgabenbearbeitung stets Mechanismen vorschneller Zuordnungen sowie scheinbar plausibler Rechnungen und Ergebnisse einen verständnisorientierten Zugang zum Gehalt der Aufgabe überlagern. Insofern zeigt die Analyse wieder ein zentrales Charakteristikum von Schülerkognitionen auf, die über die spezielle Aufgabe hinausgehen.

Die Aufgabe verlangt mit der Anweisung „Notiere deine Rechnung!“ auch eine einigermaßen ausformulierte Antwort. Die genauer beobachteten Schülerinnen und Schüler sehen das i.w. auch so, denn nur eine Minderheit davon – genauer: 17 (21,3 %) der Gymnasiasten und 4 (13,3 %) der Schülerinnen und Schüler an Gesamtschulen – geben keinen vollen Antwortsatz. In welcher Weise der Antwortsatz (gleich ob zu einem korrekten oder zu einem falschen Ergebnis) gegeben wird, drückt aus, wie die Schüler die Situation verstehen. Man findet hier durchaus Unterschiede, die anzeigen, dass die Aufgabe keineswegs sicher verstanden wird, und dass es sich analytisch lohnt, den unterschiedlichen Strategien detailliert nachzugehen.

Tabelle 8 – 8. Art des Antwortsatzes - MSA-2b, MSA-Gy-2a – „Geschwindigkeit Wasserarm“.

Art des gegebenen Antwortsatzes	Gymnasium		Gesamtschule	
Der äußere Endpunkt bewegt sich mit einer Geschwindigkeit …	30	39,0%	12	40,0%
… die Geschwindigkeit ist …	21	27,3%	5	16,7%
Die Anlage bewegt sich mit einer Geschwindigkeit …	3	3,9%	2	6,7%
Das Rohr bewegt sich mit einer Geschwindigkeit …	4	5,2%	3	10,0%
anderer falscher Antwortsatz	1	1,3%	1	3,3%
kein Antwortsatz	17	22,1%	4	13,3%
nicht bearbeitet	1	1,3%	3	10,0%
gesamt (Auswahl: je eine „starke“, „mittlere“, schwache“ Arbeit pro Klasse)	**77**	**100,0%**	**30**	**100,0%**

Die Aufgabe wird in der uns vorliegenden Stichprobe wie folgt korrekt und mit Angabe der Maßeinheit, also gewissermaßen unter Rückbezug auf das Realmodell, gelöst:

Tabelle 8 – 9. Korrekte Lösung[49] - MSA-2b, MSA-Gy-2a – „Geschwindigkeit Wasserarm“.

korrekt gelöst?	Gymnasium		Gesamtschule	
ja	52	67,5%	9	30,0%
nein	24	31,2%	18	60,0%
nicht bearbeitet	1	1,3%	3	10,0%
gesamt (Auswahl: je eine „starke“, „mittlere“, schwache“ Arbeit pro Klasse)	**77**	**100,0%**	**30**	**100,0%**

Die Aufgabe bereitet also vor allem den aus den Erweiterungskursen an den Gesamtschulen ausgewählten Schülerinnen und Schülern durchaus Probleme. Diesen Problemen gehen wir nun nach, indem wir im Folgenden die einzelnen Strategien genauer untersuchen.

Ein Grund für die, auch am Gymnasium, zunächst bemerkenswert vielen Fehllösungen mag – ein allgemeines Problem des Mathematikunterrichts – auch darin zu suchen sein, dass niemand unter den Schülerinnen und Schülern eine „Probe“ („Validierung“) gemacht hat. Diese hätte z.B. die in den Vorgaben des Ministeriums ausdrücklich für den Prüfungsteil 1 – als Basiskompetenz! – geforderte Fähigkeit zum Schätzen und Überschlagen herausgefordert: Mit groben Näherungen kommt man nämlich ohne weitere Hilfsmittel beispielsweise (es gibt viele Möglichkeiten von gleicher numerischer Simplizität) zur Abschätzung

½ km (für 450 m) * 3 (für π) * 3 ,

und das sind (mit Faktor 10 statt 3*3) etwas unter 5 km für den in einer Stunde zurückgelegten Weg. Es werden aber offenbar, ohne an der Plausibilität zu zweifeln, auch Lösungen

49 Die Lösungsquoten im Datensatz „Modul 2“ sind: Gesamtschule/Erweiterungskurs: 47,4 %, Gymnasium: 76,1 %.

wie 4214,15 km/h („nur"(?) ein Kommafehler eines mit „gut" bewerteten Schülers aus dem Gymnasium) oder 70,686 km/h (Dimensionsfehler eines mit „mangelhaft" bewerteten Gymnasiasten) u.a. notiert.

8.3.2 Kognitive Analyse der Aufgabe

Auf den zweiten Blick erscheint die Aufgabe aber gar nicht mehr so anspruchslos, so dass die Lösungsquoten (in unserer Auswahl von Schülerinnen und Schülern) durchaus akzeptabel erscheinen. Denn eine inhaltliche Analyse der Aufgabe zeigt mehrere Merkmale, die die Aufgabe kognitiv aufladen. Der entscheidende Punkt ist, dass in der Aufgabe wenigstens drei funktionale Abhängigkeiten ineinander verwoben sind, und dass in der Kognition der Schülerinnen und Schüler jeweils andere als die üblicherweise („Erwerbszusammenhang", s.o.) als variabel gedachten Größen in die funktionalen Beziehungen eingehen:

(a) Der Weg des äußeren Endpunkts des Wasserarms ist als Umfang eines Kreises mit Radius 225 m aufzufassen und zu berechnen. Die „übliche" funktionale Abhängigkeit, die in den gebräuchlichen Formeln zum Ausdruck kommt, ist die Abhängigkeit vom Radius. Hier wird aber später nicht der Radius, sondern der errechnete Wert als die einzusetzende Variable in der Geschwindigkeitsberechnung gebraucht.

(b) Dass sich der Wasserarm dreimal in einer Stunde dreht, bedeutet eine zweite funktionale Abhängigkeit. Man kann „dreimal pro Stunde" als Operator konzeptualisieren, man kann aber auch einfach den Faktor 3 einfügen (hat dann aber keine Kontrolle mehr über die Maßeinheit), man kann schließlich sogar „dreimal pro Stunde" auf „einmal in 20 min" reduzieren (und assoziiert gedanklich somit die Zahl „20" mit dem Problem).

(c) Die Geschwindigkeit ist die dritte vorkommende Funktion. Sie ist vom Begriff her von 2 Variablen abhängig und hat die Form eines Quotienten. Vorgegeben ist eine der beiden Variablen, die Zeit, und diese bereits in Form der Zeit*einheit* 1 Stunde. In diesem Falle kann man die Geschwindigkeit auch als eine „relationale" Grundgröße auffassen (siehe Kap. 3.2.5). Diese Ambiguität erschwert den gedanklichen Zugang abermals durch Interferenzen mit möglichen Erwerbszusammenhängen.

(d) Die gewonnenen Ergebnisse sind am Ende aber auch noch in die gewünschte Dimension „km/h" zu bringen, eine weitere (ebenfalls funktional zu denkende) Anforderung.

Fasst man zusammen, so haben die Schülerinnen und Schüler es mit einer durchaus verwickelten Situation zu tun. Das gesuchte Ergebnis ist strukturell aus der Auswertung einer Funktion zu gewinnen, in die die Variablen Radius (und daraus Umfang), Zahl der Umdrehungen und Zeit einzubringen sind. Wenn man mit T (= 1 h) und R (= 225 m) die einzusetzenden konkreten Werte für Radius und Zeit bezeichnet, hat man immer noch zwei gedanklich zu unterscheidende Berechnungsvarianten, die zu spezifischen Fehlerrechnungen führen können (und werden):

$$v(r,n,t) = \frac{s(r,n)}{t} = \frac{3 \cdot U(r)}{T} = \frac{3 \cdot 2\pi R}{T} = \frac{2\pi R}{T/3} = 2\pi R \cdot \left(\frac{3}{T}\right)$$

Es werden somit relativ hohe Ansprüche an die Fähigkeit zur „formalen Wissensrepräsentation" (Cohors-Fresenborg, 2001) gestellt, wofür gerade der Funktionsbegriff die zentrale Rolle spielt. Sowohl in diesem Sinn (ineinander geschachtelte Funktionen), wie auch im Sinne des Kap. 3.2.2 handelt es sich also um eine hochgradig „integrative" Aufgabe. Dementsprechend existiert eine Fülle von strukturellen Fehlerquellen, die im Folgenden aufgezeigt werden sollen.

8.3.3 Detailanalysen der Schülerschwierigkeiten

Die auftretenden Schwierigkeiten der Schülerinnen und Schüler bei dieser Aufgabe darf man nicht auf allzu allgemeiner Ebene analysieren. Denn bei den in Ziffer 4 des Kap. 7 genannten Grundausrichtungen von Lösungswegen entweder nach strukturellen oder nach situativ-kontextuellen Gesichtspunkten (vgl. dazu auch Kleine & Jordan, 2008) zeigt sich hier ein eindeutiges Verhalten der Schülerinnen und Schüler. Wohl aufgrund der schnell erkannten Komplexität der Situation richten 73 der 77 Gymnasiasten und 25 der 30 Gesamtschüler ihre Lösung inhaltlich am Sachkontext aus. Die Aufgabenlösung geht daher in kleinen Teilschritten vor. Es finden sich nur wenige ganzheitliche Vorgehensweisen (wie etwa in der Art der oben gezeigten Formeln). Es kann in der Analyse daher den einzelnen Teilschritten gefolgt werden.

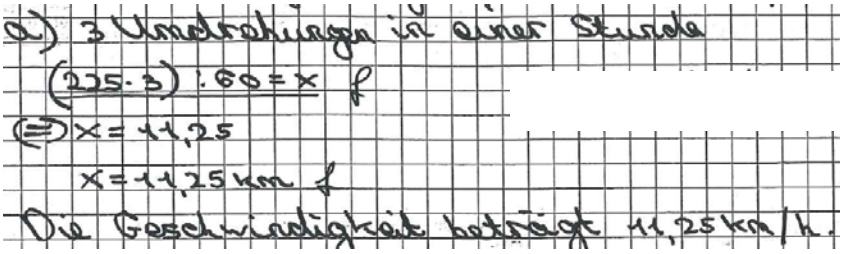
1 Weg

Was betrachten die Schülerinnen und Schüler als den zurückgelegten Weg?

Tabelle 8 – 10. Weg - MSA-2b, MSA-Gy-2a – „Geschwindigkeit Wasserarm“.

Wegberechnung	**Gymnasium**		**Gesamtschule**	
Weg ist Umfang (oder dreifacher Umfang)	64	83,1%	13	43,3%
Weg ist Radius (oder dreifacher Radius)	2	2,6%	1	3,3%
Weg ist die Anzahl der Umdrehungen	0		4	13,3%
Weg ist Durchmesser	2	2,6%	2	6,7%
Weg ist Fläche	2	2,6%	1	3,3%
trifft nicht zu	4	5,2%	6	20,0%
nicht bearbeitet	3	3,9%	3	10,0%
gesamt (Auswahl: je eine „starke“, „mittlere“, schwache“ Arbeit pro Klasse)	**77**	**100,0%**	**30**	**100,0%**

Die folgende Lösung ist einer der drei Fälle, bei denen der Radius als Weg betrachtet wird (und weitere Fehler gemacht werden):


a) 3 Umdrehungen in einer Stunde

(225 · 3) : 60 = x f

⟺ x = 11,25

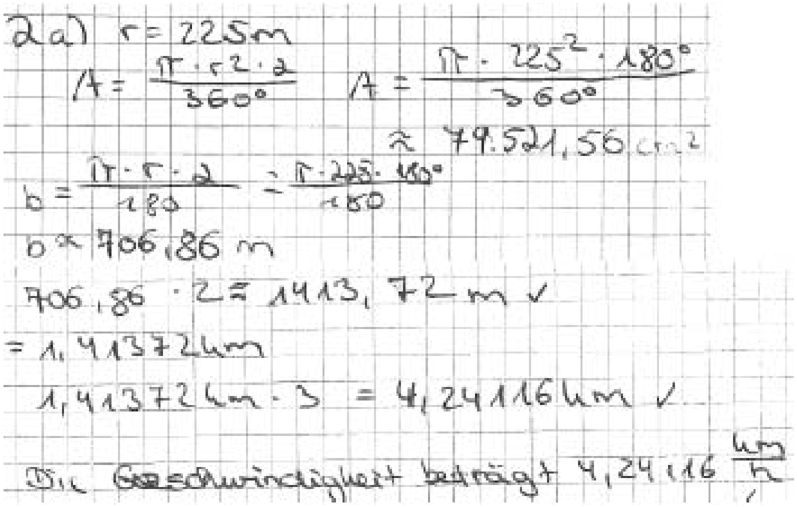
x = 11,25 km f

Die Geschwindigkeit beträgt 11,25 km/h.

Gymnasium – „befriedigend“

Darüber hinaus gibt es auch Wegberechnungen, die über die bisher explizit genannten Ansätze hinausgehen. Die folgende Lösung zeigt eine starke „Formelorientierung“. Es wird eine offenbar auswendig gelernte Formel für die Länge von Kreisbögen (und Fläche von Kreissektoren) mit gegebenem Winkel α (in der Kopie leicht fälschlich als „2“ zu lesen) ins Spiel gebracht. Sie wird aber nicht konsequent auf den vorliegenden Fall angewandt[50], sondern nach verschiedenen ad-hoc-Anpassungsvorgängen wird doch noch die richtige Lösung produziert. Die Lehrkraft erkennt daher der Lösung die vollen 4 Punkte zu.

[50] Das wäre möglich gewesen: $\alpha = 1080°$; wir finden somit eine weitere mögliche Art der funktionalen Konzeptualisierung des Problems.



Gymnasium, „gut“

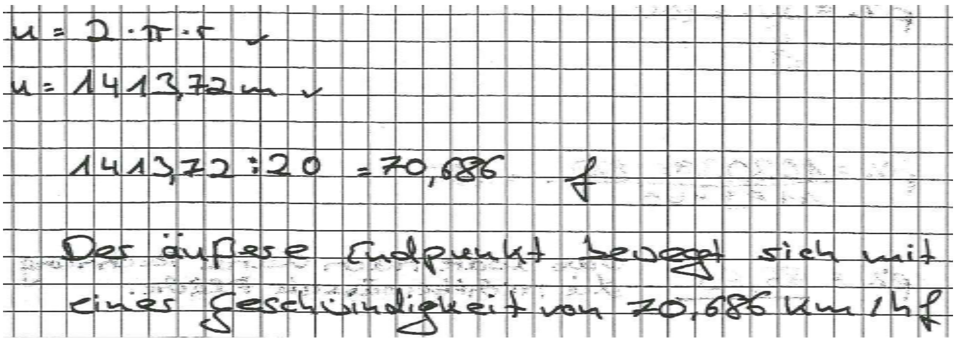
2 Geschwindigkeit

Ebenso treten bei der Berechnung der Geschwindigkeit unterschiedliche Strategien und dementsprechende Fehllösungen auf:

Tabelle 8 – 11. Berechnung der Geschwindigkeit
- MSA-2b, MSA-Gy-2a – „Geschwindigkeit Wasserarm“.

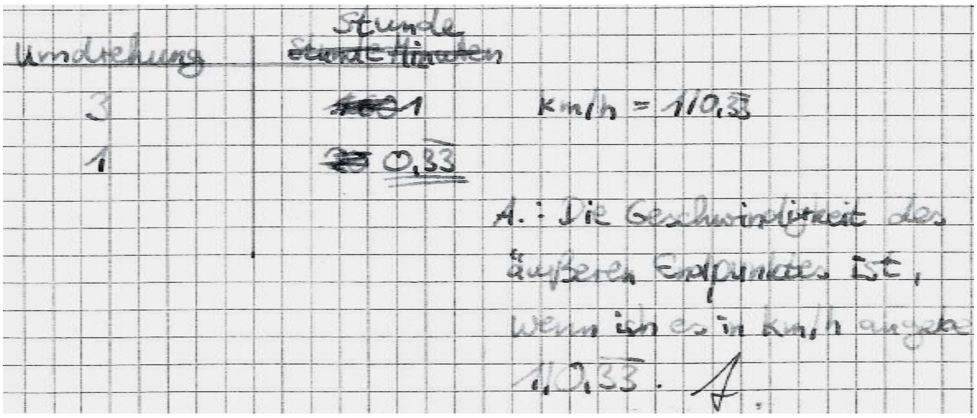
Strategie Geschwindigkeit	Gymnasium		Gesamtschule	
Erst wird der Weg bei drei Umdrehungen berechnet, dann auf die Zeit bezogen	57	74,0%	10	33,3%
Erst wird der Weg bei einer Umdrehung berechnet, dann auf die Zeit bezogen (und auf „pro Stunde“ umgerechnet)	4	5,2%	2	6,7%
Andere Geschwindigkeitsberechnung, jedoch mittels eines Quotienten	8	10,4%	14	46,7%
Strategie nicht erkennbar, da nach Berechnung des Wegs abgebrochen wird.	3	3,9%	1	3,3%
nicht zu entnehmen, andere Strategien	4	5,2%	0	,0%
Aufgabe nicht bearbeitet	1	1,3%	3	10,0%
gesamt (Auswahl: je eine „starke“, „mittlere“, schwache“ Arbeit pro Klasse)	**77**	**100,0%**	**30**	**100,0%**

Das folgende Beispiel zeigt die zweitgenannte Variante, die Geschwindigkeit bereits aus dem Weg nach 1 Umdrehung zu berechnen. Es tritt dann die Problematik der Umrechnung in km/h auf.



Gymnasium, „mangelhaft“

Die folgende Bearbeitung zeigt einen zunächst überraschenden Zugang: Es wird ein dreisatzähnliches Schema aufgestellt[51]. Auch hier gilt: Im Lichte der o.g. kognitiven Analyse ist das Vorgehen durchaus erklärbar. Die Aufgabe enthält mehrfach proportionale Abhängigkeiten: Der Weg ist proportional zur Zahl der Umdrehungen, diese wiederum zur Zeit. Es ist also nachvollziehbar, wenn spontan das Grundschema für Proportionalität, der Dreisatz (oder hier: Zweisatz) aufgerufen wird.


Umdrehung | Stunde
3 | 1   km/h = 1/0,33
1 | 0,33
A.: Die Geschwindigkeit des äußeren Endpunktes ist, wenn ich es in km/h angebe 1/0,33. f.

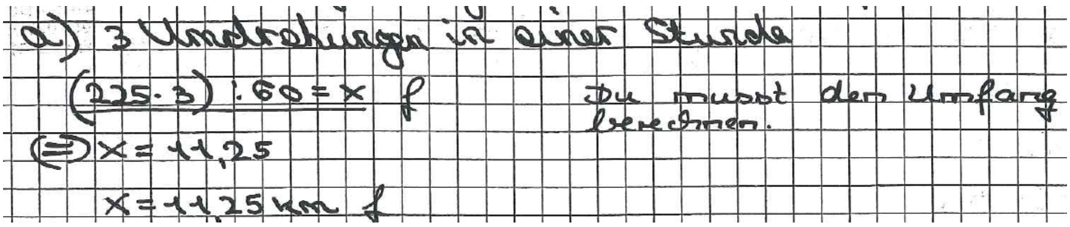
Gesamtschule – „ausreichend“

Bemerkenswert ist, dass selbst bei dieser Fehllösung an der Idee „Geschwindigkeit ist ein Quotient“ festgehalten wird. Diese Idee wird von nahezu allen beobachteten Schülerinnen und Schülern beibehalten.

3 Geschwindigkeitseinheiten

Wie man in dieser Aufgabe mit den Einheiten für die Geschwindigkeit umgeht, ist ebenfalls vielfältig. Unabhängig davon, ob ein richtiges Ergebnis erhalten wird, rechnet die Mehrzahl der Schülerinnen und Schüler von vorneherein in km/h; einige rechnen im Verlauf des Rechengangs von m/h nach km/h um. Dennoch treten hier falsche Lösungen auf, etwa wenn vom falschen Weg ausgegangen wird.

Interessanter sind die Fehler, die zustande kommen, wenn der Weg auf 1 min oder 20 min oder 60 min bezogen wird. Darunter sind auch Lösungen wie diese (rechts der Korrektureintrag der Lehrkraft):

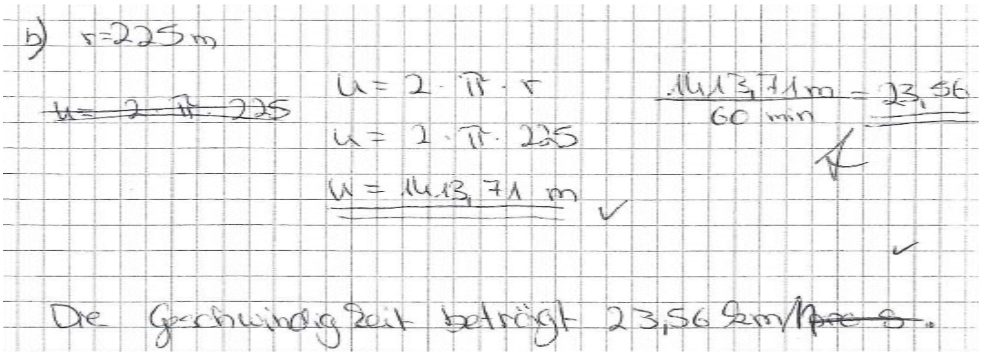

a) 3 Umdrehungen in einer Stunde
(225 · 3) : 60 = x f   Du musst den Umfang berechnen.
⇔ x = 11,25
x = 11,25 km f

Gymnasium – „befriedigend“

Es dominieren in dieser Schülerlösung die direkt im Aufgabentext angegebenen Zahlen 225 und 3 sowie die Zahl 60 und die Idee „Quotient“. Alles andere sind dimensionslose Berechnungen, die dann auf ein plausibel erscheinendes Ergebnis führen, das noch nicht einmal als Geschwindigkeit bemaßt wird.

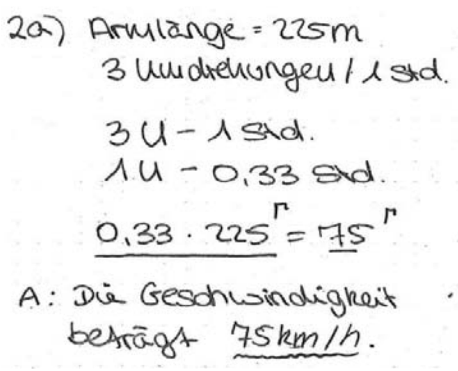
Eine andere Lösung zeigt, wie unmittelbar ein (hier zusätzlich falsch erzeugtes) Ergebnis in m/min zu km/h umdeklariert wird, offenbar weil der Zahlenwert plausibel erscheint.

[51] Dieses Schema tritt übrigens auch bei einem zweiten Schüler der gleichen Klasse anfangs auf, es wird dort aber dann wieder gestrichen.


b) r=225 m
~~u = 2 · π · 225~~
u = 2 · π · r
u = 2 · π · 225
u = 1413,71 m
1413,71 m / 60 min = 23,56
Die Geschwindigkeit beträgt 23,56 km/~~pro s~~.

Gesamtschule – „befriedigend“

Schließlich gibt es auch Vorgehensweisen, in denen die Geschwindigkeit nicht mehr explizit nach irgendeinem nachvollziehbaren Weg berechnet wird, sondern offenbar ein numerisches Zwischenresultat als plausibles oder „vertrautes“ Ergebnis genommen wird. Besonders auffällig ist diese Lösung:


2a) Armlänge = 225m
3 Umdrehungen / 1 Std.
3 U – 1 Std.
1 U – 0,33 Std.
0,33 · 225 = 75
A: Die Geschwindigkeit beträgt 75km/h.

Gymnasium – „befriedigend“

Sie beginnt mit dem schon oben erwähnten Proportionalitätsgedanken. Offenbar „klingt“ die Zahl „75“ derart nach einer „Geschwindigkeit“, dass sie als „75 km/h“ angesehen wird. Die Quotienten-Idee für die Geschwindigkeit ist dabei in der Form 3 Umdrehungen pro Stunde untergebracht. (Die „Häkchen“ sind Korrekturzeichen, die andeuten sollen, dass die Maßeinheit vermisst wird.)

Tabelle 8 – 12. Verwendung von Einheiten für die Geschwindigkeit - MSA-2b, MSA-Gy-2a – „Geschwindigkeit Wasserarm“.

Geschwindigkeitseinheiten	Gymnasium		Gesamtschule	
Rechnet von vorneherein in km/h (kann dennoch falsch sein!)	58	75,3	7	23,3%
zuerst in m/h gerechnet, dann konsequent nach km/h umgerechnet (kann dennoch falsch sein)	1	1,3	5	16,7%
Rechnet km oder m pro min, pro 20 min, pro 60 min und überträgt ohne Umrechnung auf km/h	5	6,5	5	16,7%
Rechnet in m/h und überträgt ohne Umrechnung auf km/h	1	1,3	0	,0%
andere Vorgehensweisen, die nicht die Berechnung einer Geschwindigkeit beinhalten	10	13,0	10	33,3%
Aufgabe nicht bearbeitet	1	1,3	3	10,0%
gesamt (Auswahl: je eine „starke“, „mittlere“, schwache“ Arbeit pro Klasse)	**77**	**100,0%**	**30**	**100,0%**

8.3.4 Desiderate an die Entwicklung des Mathematikunterricht

Die Analyse der Schülerlösungen zu dieser Aufgabe förderte einige Schwierigkeiten zutage, die wohl am ehesten als Desiderate an den Mathematikunterricht insgesamt aufzufassen sind. Denn eine auf den ersten Blick einfach erscheinende Aufgabe fördert doch in den Schülerbearbeitungen erhebliche Unsicherheiten zutage.

Bemerkenswert ist zunächst die am deutlichsten in der Gesamtschule sichtbar werdenden Unklarheiten bei der Umrechnung von Maßeinheiten. Von der Entwicklung eines verständnisorientieren Mathematikunterrichts aus betrachtet ist es allerdings von größerer Bedeutung, dass auf den Umgang mit sich gegenseitig beeinflussenden funktionalen Abhängigkeiten im Mathematikunterricht intensiver eingegangen wird, und zwar sowohl begrifflich als auch in Hinblick auf die Verwendung von „Funktionen als Werkzeuge“ (Cohors-Fresenborg, 2003), gerade in realitätsorientierten Aufgaben. Es ist dabei Wert auf mehr strukturiertes Denken zu legen, um die Komplexität selbst in scheinbar einfachen Aufgaben wie dieser beherrschen zu lernen. Andernfalls weichen die Schülerinnen und Schüler – wie gesehen – auf die Übernahme von plausiblen, aber zufällig auftauchenden Zwischenergebnissen aus.

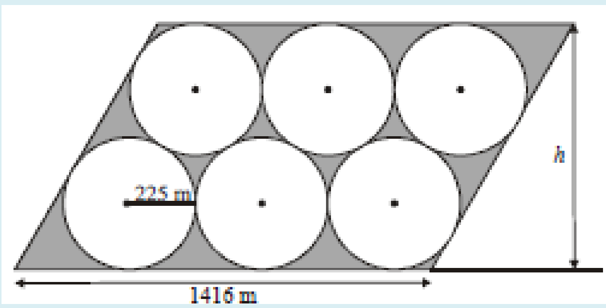
8.4 MSA-Gy-2d2 – „Getreidefeld – Parallelogramm-Anordnung“: Umgehen mit der nachträglichen Prüfung eines hypothetischen Werts

Die nur in der Prüfung für die Gymnasien gestellte Aufgabe, nachträglich den vorgegebenen Wert von 840 m für die „Höhe“ des Feldes bei dichter Kreispackung zu bestätigen, wurde bereits in Kap. 4.2 erwähnt. Dort wurde auf den begrifflichen Kern der Aufgabe hingewiesen, die eine „strukturell-allgemeine Modellierung“ verlangt. In diesem Abschnitt steht im Mittelpunkt, inwieweit die Schülerinnen und Schüler auf dieses (vermutlich ungewohnte) Aufgabenformat reagieren und inwieweit sie sich tatsächlich auf das strukturelle Verstehen der geometrischen Situation einlassen.

Die Aufgabe ist folgendermaßen formuliert, wobei wir hier nur die Schülerbearbeitungen zu MSA-Gy-2d2 analysieren. Dazu ist es aber entscheidend, auch die vorangehende Aufgabe MSA-Gy-2d1 als Hintergrund der Bearbeitungen zu beachten; sogar die Aufgabe davor – MSA-Gy-2c - Länge der Wasserleitungen in einem rechteckigen Feld – wird in die Analyse der Schülerbearbeitungen dieser Aufgabe einfließen.

MSA-Gy-2d – „Getreidefeld – Parallelogramm-Anordnung

d) Auf einer anderen Farm sind die Bewässerungsanlagen anders angeordnet:



d1) Berechne den prozentualen Anteil der nicht bewässerten Fläche (hier grau dargestellt). Nimm dabei an, dass $h = 840$ m ist.

d2) Weise nun nach, dass h tatsächlich ungefähr 840 m ist. Notiere deine Rechnung.

8.4.1 Drei Lösungsvarianten

Die Aufgaben MSA-Gy-2d1 und MSA-Gy-2d2 zusammen weisen ein bemerkenswertes Format auf, das in der Schulbuchliteratur und im Mathematikunterricht wohl eher selten benutzt wird, in der Mathematik selbst aber als durchaus typisch gelten darf: Es wird zunächst mit einem vorgegebenen Wert (840 m) sozusagen „hypothetisch" gerechnet und erst im Nachhinein besteht die Aufgabe darin, die vorher nicht hinterfragte Angabe aus der geometrischen Konfiguration heraus mathematisch zu bestätigen. Dass auch der Wert 1416 m von der Art einer „hypothetischen" Angabe ist und eigentlich ebenfalls aufgrund der geometrischen Konfiguration hergeleitet werden könnte, wird nicht thematisiert.

Die Aufgabe MSA-Gy-2d2 enthält also zunächst schon vom inhaltlichen Frageformat her eine kognitive Herausforderung. Diese spiegelt sich in den zu beobachtenden Lösungsansätzen der Schülerinnen und Schüler wider. Drei Lösungsvarianten sind denkbar, die drittgenannte ist jedoch nicht akzeptierbar:

1 Die exakte geometrische Lösung greift – in verschiedenen konkreten Ausprägungen – letztlich auf das gleichseitige Dreieck aus den Mittelpunkten der Kreise zurück und kommt mittels der Berechnung der Höhe im gleichseitigen Dreieck über den Satz des Pythagoras zur Lösung. Diese Lösungsvariante ist offenbar von den Aufgabenstellern intendiert, denn in den Korrekturvorgaben des Ministeriums ist diese Variante angegeben. Darüber hinaus sind Aufgaben dieses Typs der prozessbezogenen Kompetenz „Problemlösen" zugeordnet; auch deshalb erwartet man wohl die strukturelle und exakte Lösung.

2 Eine zweite Lösungsvariante ist zwar nicht intendiert, aber sie widerspricht weder dem Grundtenor der gesamten ZP-10 noch wird sie durch die Formulierung des Aufgabentextes ausgeschlossen, eher sogar provoziert. Man kann den Charakter der Aufgabe als anwendungsbezogene Aufgabe hervorheben (prozessbezogene Kompetenz: Modellieren) und wird dazu durch den Hinweis, es gehe um den Nachweis von „*tatsächlich ungefähr* 840 m" sogar ermutigt. Dann liegt es nahe, mit einer begründeten Schätzung zu antworten: Die Höhe entspricht nicht ganz dem vierfachen Radius, denn (a) die Radien überschneiden sich ja, wenn man sie auf die Höhe projiziert[52], oder (b) eine Verbindung der unteren und der oberen Grenze des Feldes längs von vier Radien weist einen Knick auf. Daher muss es sich bei h um weniger als 900 m handeln und ein Abzug von ca. 60 m kommt der geometrische Situation erkennbar recht nahe.

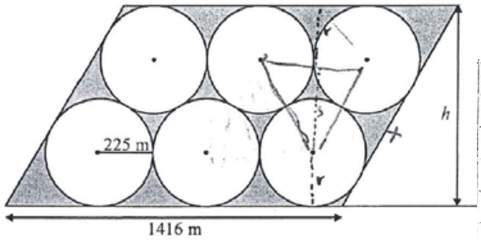
3 Schließlich werden die Schülerinnen und Schüler – wie zu zeigen sein wird – tatsächlich durch die ungewohnte Aufgabenstellung der nachträglichen Überprüfung verleitet, auf vorher berechnete Ergebnisse zurückzugreifen, wie es ja auch sonst im Mathematikunterricht laufend geschieht. Es werden sich tatsächlich solche Zirkelschlüsse finden lassen. Sie kommen in zwei Vorgehensweisen vor: Die nicht bewässerte Fläche wurde in MSA-Gy-2d1 ausgerechnet, allerdings eben bereits mit Verwendung von h = 840 m. Wenn man sie als

$$1416\text{ m} \cdot h - 6\pi r^2$$

ansetzt, kann man daraus h (zirkulär) zurückrechnen; dieses Vorgehen wird unten als Schülerlösung gezeigt. Eine andere Vorgehensweise greift auf die Prozentberechnungen in MSA-Gy-2d1 zurück und schließt von daher – weniger leicht als zirkulär zu durchschauen – auf die Höhe zurück.

[52] Dies ist die im Beispiel unten gezeigte Variante.

Hier folgen Schülerbearbeitungen zu jeder der drei Varianten. Ein Beispiel der Lösung mittels Pythagoras ist:



$r^2 + s^2 = 2r^2$

$s = 389,71$

$h = 2r + s$ ✓

$= 2 \cdot 225 + 389,71$

$= 839,71$

Gymnasium – „gut“

Der Erstkorrektor moniert das Fehlen der Einheiten und verweigert 2 Punkte. Der Zweitkorrektor akzeptiert dann aber die Lösung mit voller Punktzahl.

Die Schätzmethode wird zunächst an einem Beispiel vorgestellt, in dem ausführlich argumentiert wird. Die Abschätzung der Größe der Überschneidung der Kreisradien wird durch passende Hilfslinien in der Zeichnung unterstützt. Beide Korrektoren geben hierfür 0 Punkte und merken an: „Bezug zur Aufgabenstellung?“

d2) Auf der Fläche sind 6 Kreise (Bewässerungsanlagen) in 2 Reihen versetzt aufgebaut mit der r = 225 m. Sollte ich also die d = 450 m zusammen rechnen, da sie in 2 Reihen angeordnet sind,

2 · 450 m = 900 m

erhalte ich eine h = 900 m.

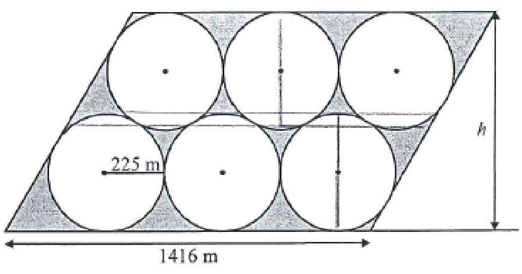
Da die Anlagen (Kreise) jedoch versetzt angeordnet sind, beträgt die Höhe (h) etwas weniger, als 900 m.

900 m − x = 840 m

(⇔) x = 900 m − 840 m

(⇔) x = 60 m

Die beträgt ca. 840 m, da die Versetzung ca. 60 m der Höhe (h) einbüßt.



Gymnasium - „befriedigend“

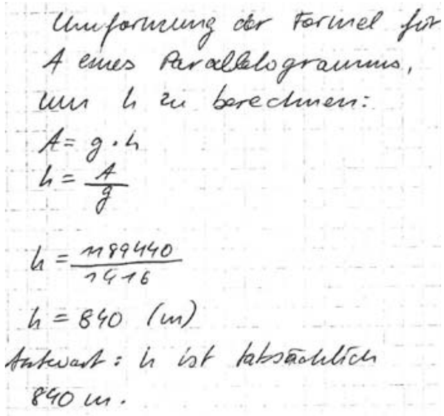
Das folgende Beispiel zeigt ein nicht mehr argumentierendes Vorgehen:

Durch die Kreise kann man erkennen, dass die Höhe etwas unter 900 m liegen muss.

Gymnasium – „sehr gut“

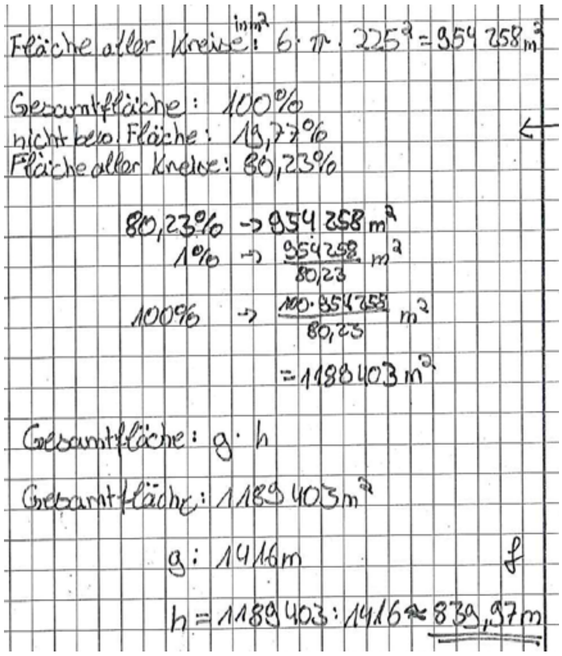
In die Figur im Angabenblatt wird nichts eingezeichnet. Beide Korrektoren erkennen, dass keinen Begründungen angegeben werden und bewerten mit 0 Punkten.

Die beiden Varianten der zirkulären Lösungen sehen aus Schülerhand so aus:


Umformung der Formel für
A eines Parallelogramms,
um h zu berechnen:
$A = g \cdot h$
$h = \frac{A}{g}$
$h = \frac{1189440}{1416}$
$h = 840$ (m)
Antwort: h ist tatsächlich
840 m.

Gymnasium – „sehr gut“

Bewertet wird mit 0 Punkten. Die andere Variante der zirkulären Lösung verwendet Prozente:


Fläche aller Kreise in m²: $6 \cdot \pi \cdot 225^2 = 954\,258\ m^2$
Gesamtfläche: 100%
nicht bew. Fläche: 19,77%
Fläche aller Kreise: 80,23%
80,23% → 954 258 m²
1% → $\frac{954258}{80,23}$ m²
100% → $\frac{100 \cdot 954258}{80,23}$ m²
= 1188403 m²
Gesamtfläche: g · h
Gesamtfläche: 1189403 m²
g: 1416 m
h = 1189403 : 1416 ≈ 839,97 m

Gymnasium – „sehr gut“

In dieser Schülerbearbeitung wurde eine Zeile vorher korrekt berechnet, dass 19,77 % der Fläche des Feldes nicht bewässert werden. Der Korrektor bemerkt an der Stelle des noch sichtbaren Pfeiles: „Hier ist h = 840 m bereits eingegangen“. Bewertet wird mit 0 Punkten.

8.4.2 Lösungsverhalten der Schülerinnen und Schüler: Welche prozessbezogenen Kompetenzen sind realisiert?

In der (größeren) Stichprobe des Datensatzes „Modul 2“ (Tab. 2-27) lösen 9,5 % der Schülerinnen und Schüler des Gymnasiums die Aufgabe korrekt. Unter den ausgewählten 74 Schülerinnen und Schülern[53], von denen die Bearbeitungen analysiert werden, erhalten 11 (14,9 %) die volle Punktzahl von 4 Punkten, 14 Schülerinnen und Schüler (18,9 %) errei-

[53] Siehe oben: Drei Schülerlösungen ohne Korrekturprotokoll. Die Aufgabenbearbeitungen selbst und deren Merkmale liegen von allen 77 Schülerinnen und Schüler vor.

chen 1 Punkt und 49 (66,2 %) erzielen keinen Punkt, bzw. haben die Aufgabe nicht bearbeitet.

Eine erste naheliegende Frage ist, ob sich die Schülerinnen und Schüler zu den drei aufgezeigten Lösungsvarianten unterschiedlich verhalten, je nachdem ob es sich um „starke“ oder „schwache“ (gemessen an ihrer Endnote) Schülerinnen und Schüler handelt. Wenn die Lösungsvarianten über das ganze Leistungsspektrum der Schülerinnen und Schüler verteilt sind, dann scheint die Vermutung plausibel, dass es allgemeine kognitive Schwierigkeiten sind, die mit der Aufgabe verbunden sind. Die sich anschließende Frage ist, ob ein evtl. unterschiedliches Verhalten allein auf mangelndes sachliches Wissen (des Satzes des Pythagoras) zurückgehen kann.

Tabelle 8 – 13. Strategien bei der nachträglichen Berechnung der Höhe, aufgeschlüsselt nach Noten der Schülerinnen und Schüler - MSA-Gy-2d2 – „Getreidefelder – Parallelogramm-Anordnung“:

	sehr gut	gut	befriedigend	ausreichend	mangelhaft	gesamt	
Pythagoras: Höhe des gleichseitigen Dreiecks	3	0	0	0	0	3	3,9%
Pythagoras: rechtwinkliges Dreieck mit Seiten r und 2r	6	1	0	0	0	7	9,1%
Strategie: a/2·√3 aus der Formelsammlung	0	0	1	0	0	1	1,3%
Schätzmethode argumentierend	4	1	3	0	1	9	11,7%
Schätzmethode nicht angemessen	4	3	5	4	1	17	22,1%
zirkuläre Rückrechnung mit Prozenten	2	2	0	0	0	4	5,2%
zirkuläre Rückrechnung mit Flächenberechnung	2	0	7	4	2	15	19,5%
andere falsche Strategie	0	1	3	2	0	6	7,8%
Aufgabe nicht bearbeitet	0	2	5	7	1	15	19,5%
gesamt (Auswahl: je eine „starke“, „mittlere“, schwache“ Arbeit pro Klasse)	**21**	**10**	**24**	**17**	**5**	**77**	**100,0%**
	27,3%	**13,0%**	**31,2%**	**22,1%**	**6,5%**	**100,0 %**	

Auffällig ist dreierlei: Sowohl leistungsstarke wie leistungsschwache Schülerinnen und Schüler verwenden gleichermaßen Schätzmethoden (ob angemessen formuliert oder nicht), in beiden Schülergruppen kommen die zirkulären Schlüsse vor, aber nur die leistungsstärkeren Schülerinnen und Schüler greifen auf die – eigentlich intendierte – Berechnung mittels des Satzes des Pythagoras zurück.

Laut den Vorgaben aus dem Ministerium sind Aufgaben wie diese der prozessbezogenen Kompetenz des Problemlösens zuzuordnen. Man erwartet sich, dass durch die Berechnungen mit dem Satz des Pythagoras eine mathematische Strukturierung des Problems und damit geometrisches Verstehens erfolgt. Von der Mehrzahl der Schülerinnen und Schüler wird dies aber über das gesamte Leistungsspektrum hinweg anders gesehen. Der Anwendungscharakter der Aufgabe dominiert, die Schülerinnen und Schüler sind mehrheitlich in der Kompetenz des Modellierens angesprochen und greifen folgerichtig zu Schätzverfahren. Dass auch „sehr gute“ und „gute“ Schülerinnen und Schüler auf zirkuläre Lösungsansätze kommen, unterstreicht die Meinung, dass das Format der nachträglichen Bestätigung ungewohnt ist und einer expliziten Vorbereitung im Mathematikunterricht bedarf.

Man könnte nun vermuten, dass leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler den Pythagoras deshalb nicht anwenden, weil ihnen dieser Satz nicht geläufig ist. Das ist aber nicht der Fall. Denn eine Gegenüberstellung der Strategien bei Berechnung der Höhe (MSA-Gy-2d2) und der Strategien bei Berechnung der Länge der Wasserrohre (längeres Teilstück) in der unmittelbar vorangehenden Aufgabe MSA-Gy-2c zeigt dies:

Tabelle 8 – 14. Gegenüberstellung von Lösungsstrategien bei der nachträglichen Berechnung der Höhe in MSA-Gy-2d2 (Zeilen) und der Berechnung der Länge der Wasserrohre in MSA-Gy-2c (Spalten

	Pythagoras verwendet	**falsch: doppelter Radius**	**falsch (sonst), nicht ersichtlich**	**Aufgabe nicht bearbeitet**	**gesamt**	
Pythagoras: Höhe des gleichseitigen Dreiecks	3	0	0	0	3	3,9%
Pythagoras: rechtwinkliges Dreieck mit Seiten r und 2r	7	0	0	0	7	9,1%
Strategie: a/2 √3 aus der Formelsammlung	0	1	0	0	1	1,3%
Schätzmethode argumentie-rend	7	1	1	0	9	11,7%
Schätzmethode nicht ange-messen	9	6	2	0	17	22,1%
zirkuläre Rückrechnung mit Prozenten	4	0	0	0	4	5,2%
zirkuläre Rückrechnung mit Flächenberechnung	5	5	4	1	15	19,5%
andere falsche Strategie	4	1	1	0	6	7,8%
Aufgabe nicht bearbeitet	9	3	1	2	15	19,5%
gesamt (Auswahl: je eine „starke“, „mittlere“, schwache“ Arbeit pro Klasse)	**48** **62,3 %**	**17** **22,1 %**	**9** **11,7 %**	**3** **3,9 %**	**77** **100,0 %**	**100,0%**

Offenbar sind weitaus mehr Schülerinnen und Schüler in der Lage, den Pythagoras in Anwendungszusammenhängen wie bei der Berechnung der Länge der Wasserrohre einzusetzen (48 Schülerinnen und Schüler), als es sich bei der Aufgabe MSA-2d2 zeigt (10 Schülerinnen und Schüler). Das Wissen selbst ist also durchaus vorhanden. Es kommt aber dann nicht zum Einsatz, wenn in der Formulierung der Aufgabe nicht mehr explizit „Berechne die Gesamtlänge …“ (MSA-Gy-2c) gefordert wird, sondern das unbestimmtere „Weise nun nach …“ (MSA-Gy-2d2) erscheint. Tritt dies in einer realitätsorientierten Aufgabe auf, dann zieht eine größere Zahl der Schülerinnen und Schüler, gerade auch leistungsstarke, offenbar den Schluss, alltagstaugliche Verfahren wie Schätzen seien angemessen.

Übrigens machen nur 7 Schülerinnen und Schüler eine dreiecksähnliche Zeichnung und das sind ausschließlich diejenigen, die auch die Pythagoras-Methode verwenden.

8.4.3 Konsequenzen für die Aufgabenformulierung

Die Schülerbearbeitungen zu dieser Aufgabe verwiesen auf eine zentrale Grundbedingung für jede Aufgabenkonstruktion. Es ist zunächst von Aufgabenstellern festzulegen, welchem Ziel – sachlich, kognitiv, auf Kompetenzen bezogen, etc. – eine Aufgabe dienen soll, und anschließend ist so zu formulieren, dass auch den Schülerinnen und Schülern dieses Ziel klar verständlich kommuniziert wird.

In der vorliegenden Aufgabe ist die Intention hinter der Aufgabenstellung offenbar, eine Problemlöseaufgabe zu stellen, strukturelle Lösungen zu erhalten und zu einem exakten Ergebnis zu kommen. Sowohl die Korrekturhinweise (an die sich die Lehrerinnen und Lehrer halten) wie auch die Vorgaben in der Kompetenzmatrix zur ZP-10 zeigen in diese Richtung. Die Schülerinnen und Schüler hingegen nehmen zunächst den Kontext der Aufgabe wahr, fühlen sich daher frei in der Wahl vielfältiger Strategien und erreichen so nicht immer das Ziel. Gleichwohl stünde vielen von ihnen das fachliche Wissen zur Verfügung.

Um eine solche Spannung zwischen Aufgabenintention und Aufgabenauffassung zu vermeiden, sind verschiedene Formulierungsmerkmale zu bedenken, ohne dass hier konkrete Verbesserungsvorschläge zu machen wären. Generelle Richtschnur sind dafür Überlegungen wie: Zeigen die Anweisungen („berechne“, „weise nach“) in die intendierte Richtung? Soll man die Intention ausdrücklich erwähnen („es geht jetzt um eine exakte Lösung“)? Soll vom Kontext abstrahiert werden („betrachte das Feld nun als geometrische Figur“)? Sollen Hinweis zur erwarteten Strategie gegeben werden („verwende geometrische Berechnungsmethoden“)? Usw.. Aufgabenstellung und Aufgabenbearbeitung wirken äußerst sensibel durch solche Formulierungsverschiebungen gegenseitig aufeinander ein. Die Wirkung ist dabei ganz von der einzelnen Aufgabe abhängig. Gerade die vorliegenden Schülerbearbeitungen zeigen sehr anschaulich diese Effekte und sind daher eine Art „Lehrstück“ für Aufgabenkonstruktion im Allgemeinen.

Die andere Charakteristik der Aufgabe, dass es sich nämlich um das kognitive Format der „nachträglichen Bestätigung eines vorher hypothetisch angenommenen Zusammenhangs“ handelt, verweist eher auf den Mathematikunterricht selbst: Solche mathematisch wichtigen, geradezu charakteristischen Denkfiguren scheinen im Mathematikunterricht wenig gepflegt zu sein. Sie setzen zwar komplexes Denken bei den Schülerinnen und Schülern voraus, eben dies ist aber eines der Basisziele des Mathematikunterrichts, insbesondere unter der Perspektive der Ausbildung prozessbezogener Kompetenzen wie Argumentieren und Kommunizieren, die in den Kernlehrplänen von Nordrhein-Westfalen zentral hervorgehoben sind.

8.5 MSA-4g und MSA-Gy-4c – „Spannweite der Bogenbrücke“: Schematische Ansätze und strukturelles Erkennen

Zwei Gesichtspunkte können an der Aufgabe zur Spannweite einer Bogenbrücke anhand der Schülerbearbeitungen aufgezeigt werden: Welche – schematischen oder einsichtsvollen – Wege werden zur Lösung der einfachen quadratischen Gleichung gewählt und wie wird mit Genauigkeitsangaben im mathematischen und im realitätsorientierten Kontext umgegangen? Beide Gesichtspunkte führen wieder zurück auf die Grundproblematik, inwieweit aus den Schülerbearbeitungen intelligentes und flexibles Wissen erkennbar wird.

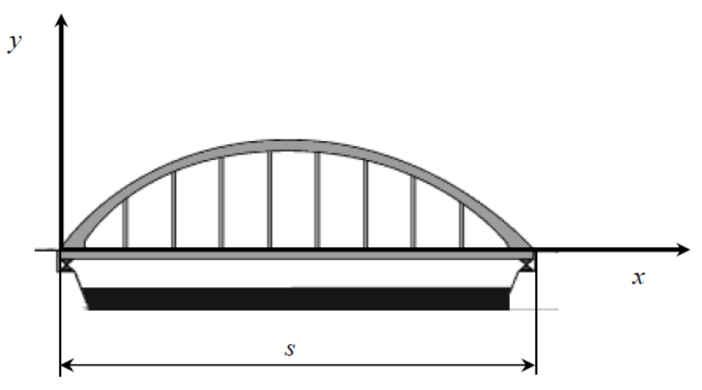
Die Aufgabe ist sowohl in der MSA-Prüfung wie in der MSA-Gy-Prüfung die letzte auf den Angabenblättern. Es gibt aber kaum Anhaltspunkte dafür, dass die Aufgabe aus Gründen des Zeitdrucks nicht mehr zu bearbeiten war. Denn die Lösungsquoten und die Bearbeitungsquoten entsprechen vernünftigen Erwartungen und den Quoten bei Aufgaben vergleichbaren Anspruchs:

Tabelle 8 – 15. Quoten[54] (in der Stichprobe der ausgewählten kompletten Schülerbearbeitungen[55]) für Bearbeitung und vollständige Lösung - MSA-4g und MSA-Gy-4c – „Spannweite der Bogenbrücke“

	Gymnasium		Gesamtschule	
bearbeitet	64	83,1%	19	63,3%
vollständig gelöst (Bewertung: 4 Punkte)	28	37,8%	7	23,3%
(Auswahl: je eine „starke“, „mittlere“, schwache“ Arbeit pro Klasse)				

Die Aufgabe lautet wie folgt:

MSA-4g und MSA-Gy-4c – „Spannweite der Bogenbrücke“:
Eine Bogenbrücke (vgl. Abbildung unten) hat annähernd die Form einer Parabel mit zugehöriger Funktionsgleichung $y = -0{,}007 \cdot x^2 + 1{,}3 \cdot x$ (x und y in Metern).



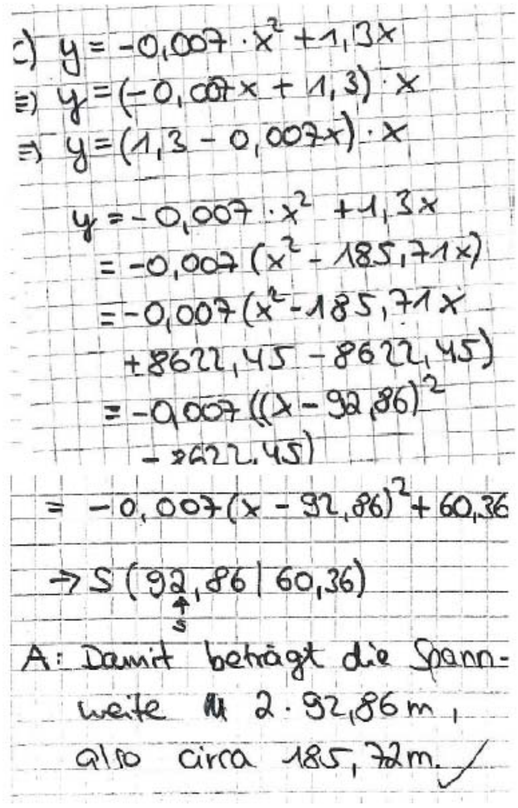
c) Bestimme die Spannweite s. Notiere deine Rechnung.

8.5.1 Vorgehen der Schülerinnen und Schüler

Die naheliegende Lösung ist, die „Spannweite“ als zweite Nullstelle der vorgegebenen quadratischen Funktion zu modellieren. Es kommt aber auch eine zweite Lösungsstrategien vor, nämlich die Funktion mittels quadratischer Ergänzung in die Scheitelform zu transformieren, die Koordinaten des Scheitels abzulesen und dann die Spannweite als den doppelten Abstand des Scheitels vom Ursprung anzugeben. Diese Lösung wird zunächst gezeigt:

[54] N=77 bei „bearbeitet“, N=74 bei „vollständig gelöst“ (siehe oben). Endnote bei N=77 bekannt.

[55] In der größeren Stichprobe „Modul 2“ sind an vollständigen Lösungen vorhanden: 37,9 % im Gymnasium und 12,6 % in der Gesamtschule/Erweiterungskurs (Tab. 2-27).



c) $y = -0{,}007 \cdot x^2 + 1{,}3x$

$\Rightarrow y = (-0{,}007x + 1{,}3) \cdot x$

$\Rightarrow y = (1{,}3 - 0{,}007x) \cdot x$

$y = -0{,}007 \cdot x^2 + 1{,}3x$

$= -0{,}007\,(x^2 - 185{,}71x)$

$= -0{,}007\,(x^2 - 185{,}71x + 8622{,}45 - 8622{,}45)$

$= -0{,}007\,((x - 92{,}86)^2 - 8622{,}45)$

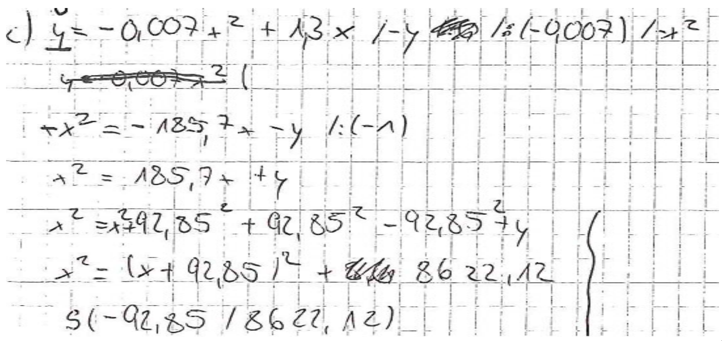
$= -0{,}007\,(x - 92{,}86)^2 + 60{,}36$

$\rightarrow S(92{,}86 \mid 60{,}36)$

A: Damit beträgt die Spannweite $2 \cdot 92{,}86$ m, also circa 185,72m.

Gymnasium – „sehr gut“

Die Lösungen mit dem Ansatz „Nullstelle“ folgen nun in verschiedenen Varianten. Die Lösungsstrategie über die quadratische Ergänzung ist nicht nur mathematisch nicht angemessen, sondern auch rechnerisch sehr aufwendig, so dass hier sehr viele Umformungs- und Umrechnungsfehler gemacht werden, wie etwa hier:



c) $y = -0{,}007x^2 + 1{,}3x \quad | -y \quad | :(-0{,}007) \quad | -x^2$

$\cancel{y = 0{,}007x^2}$ (

$+x^2 = -185{,}7x - y \quad | :(-1)$

$x^2 = 185{,}7x + y$

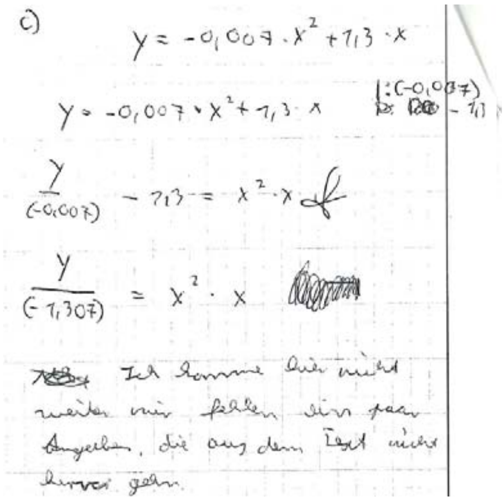
$x^2 = x\,92{,}85^2 + 92{,}85^2 - 92{,}85^2 + y$

$x^2 = (x + 92{,}85)^2 + 8622{,}12$

$S(-92{,}85 \mid 8622{,}12)$

Gymnasium – „befriedigend“

In einer Reihe von Schülerbearbeitungen gibt es Strategien, die keiner der geläufigen Methoden folgen oder schlicht in vielen einzelnen Punkten falsch oder gar unsinnig sind. Solche Lösungen werden in der Tabelle als „andere Strategien“ gesammelt, obwohl natürlich jede einzelne solche Lösung nähere Betrachtung verdiente, beispielsweise Bearbeitungen wie diese:



c)

$y = -0{,}007 \cdot x^2 + 1{,}3 \cdot x$

$y = -0{,}007 \cdot x^2 + 1{,}3 \cdot x \quad |:(-0{,}007) \quad | -1{,}3$

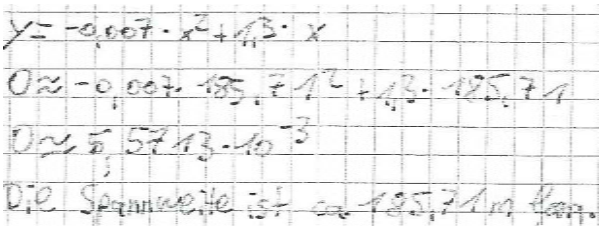
$\frac{y}{(-0{,}007)} - 1{,}3 = x^2 \cdot x$

$\frac{y}{(-1{,}307)} = x^2 \cdot x$

Ich komme hier nicht weiter mir fehlen ein paar Angaben, die aus dem Text nicht hervor gehen.

Gymnasium – „ausreichend“

Unklarheit besteht bei einigen Schülerbearbeitungen (je zwei in Gymnasium und Gesamtschule), bei denen die Lösung unvermittelt auftaucht. Die Gründe dafür sind nicht immer nachzuvollziehen, beispielsweise hier[56]:



$y = -0{,}007 \cdot x^2 + 1{,}3 \cdot x$

$0 \approx -0{,}007 \cdot 185{,}71^2 + 1{,}3 \cdot 185{,}71$

$0 \approx 5{,}5713 \cdot 10^{-3}$

Die Spannweite ist ca. 185,71 m lang.

Gesamtschule – „sehr gut“

Die folgenden Tabellen geben eine Übersicht über das Lösungsverhalten der Schülerinnen und Schüler an den Gymnasien und an den Gesamtschulen, jeweils in Relation zu den Endnoten der Schülerinnen und Schüler.

[56] Ein Weg könnte sein: Es wird „im Kopf“ erkannt, dass man 1,3 : 0,007 rechnen muss. Das geschieht mit dem Taschenrechner. Dann wird eine Probe zur Verifikation gemacht.

Tabelle 8 – 16. Art der Strategie beim Lösen der quadratischen Gleichung - MSA-Gy-4c – „Spannweite der Bogenbrücke“:

Gymnasium

	sehr gut	gut	befriedigend	ausreichend	mangelhaft	gesamt	
mit p-q-Formel	9	3	8	0	1	21	27,3
mit a-b-c-Formel	0	2	0	1	0	3	3,9
mit Produktzerlegung und dem Schluss „Null wenn ein Faktor null ist“	2	1	1	0	0	4	5,2
mit quadratischer Ergänzung zur Berechnung von Nullstelle oder Scheitel	5	0	3	1	0	9	11,7
Scheitel mit „Ableitung= 0“ bestimmt	0	1	0	0	0	1	1,3
Äquivalenzumformungen, Lösung x=0 berücksichtigt	2	1	1	0	0	4	5,2
Äquivalenzumformungen, Lösung x=0 NICHT beachtet	2	1	2	1	1	7	9,1
andere Strategien, meist Mischformen, meist falsch	1	1	6	5	1	14	18,2
Kopie der Aufgabenbearbeitung fehlt	0	0	0	1	0	1	1,3
Aufgabe nicht bearbeitet	0	0	3	8	2	13	16,9
gesamt	**21**	**10**	**24**	**17**	**5**	**77**	**100,0%**
(Auswahl: je eine „starke“, „mittlere“, schwache“ Arbeit pro Klasse)	**27,3%**	**13,0%**	**31,2%**	**22,1%**	**6,5%**	**100,0%**	

Gesamtschule / Erweiterungskurs

	sehr gut	gut	befriedigend	ausreichend	mangelhaft	ungenügend	gesamt	
mit p-q-Formel	4	0	0	0	0	0	4	13,3%
mit Produktzerlegung und dem Schluss „Null wenn ein Faktor null ist“	1	0	0	0	0	0	1	3,3%
Äquivalenzumformungen, Lösung x=0 NICHT beachtet	1	1	1	1	1	0	5	16,7%
andere Strategien, meist Mischungen, meist falsch	1	0	4	0	2	0	7	23,3%
Kopie der Aufgabenbearbeitung fehlt	0	0	0	1	0	1	2	6,7%
Aufgabe nicht bearbeitet	0	2	3	3	3	0	11	36,7%
gesamt	**7**	**3**	**8**	**5**	**6**	**1**	**30**	**100,0%**
(Auswahl: je eine „starke“, „mittlere“, schwache“ Arbeit pro Klasse)	**23,3%**	**10,0%**	**26,7%**	**16,7%**	**20,0%**	**3,3%**	**100,0%**	

Zur Interpretation dieser Daten sollte man sich die angemessene Lösung kurz vorstellen: Die Gleichung wird in der Form $y = -0{,}007 \cdot x \cdot (x - 1{,}3/0{,}007)$ angeschrieben. Dann ergeben sich mit dem Gedanken, dass ein Produkt nur 0 werden kann, wenn einer Faktoren verschwindet, die (hier nicht interessierende) Nullstelle 0 und die brauchbare Nullstelle 1,3/0,007. Eine quadratische Gleichung des vorgegebenen Typus mit einer unmittelbar erkennbaren Lösung $x = 0$ sollte also vom mathematischen Standpunkt aus weder mit der p-q-Formel, noch mit der a-b-c-Formel, noch mit quadratischer Ergänzung und erst recht nicht mit dem Begriff der Ableitung gelöst werden. Dies sind schematische Vorgehensweisen. Über die Wahl des Verfahrens wird nicht adaptiv nachgedacht. Diese schematischen Verfahren treten aber in der überwiegenden Mehrzahl der Fälle in unserer Stichprobe auf, und zwar gerade vermehrt bei den leistungsstärkeren Schülern. Diese Schülerinnen und Schüler sind allerdings auch die einzigen, die solche naturgemäß rechnerisch aufwendigen Lösungsverfahren auch konsequent durchhalten können. Die Intention bei der Aufgabenstellung und die darauf ausgerichteten Korrekturvorschläge, mit der vorgegebenen einfachen Gleichung auch eine angemessene Lösungsmethode auszulösen, laufen also offenbar bei den Schülerinnen und Schülern ins Leere.

Die Botschaft aus diesen Daten ist nicht neu. Die vorliegenden Schülerbearbeitungen unterstreichen aber, wie notwendig –auch bei leistungsstarken Schülerinnen und Schülern – die Hinführung zu einem verständnisvollen Anwenden allgemeiner Formeln ist.

8.5.2 Verstehen der realen Bedeutung des Ergebnisses

Ob Schülerinnen und Schüler in ihrer Antwort tatsächlich die reale Bedeutung des Ergebnisses im Anwendungskontext erkennen, ist schwer allein aus den schriftlichen Schülerbearbeitungen auszumachen. Es gibt jedoch einen Indikator, der gerade bei dieser Aufgabe, deren exaktes Ergebnis ein periodischer Dezimalbruch mit einer Periodenlänge von 6 Stellen nach dem Komma ist, greift. Wenigstens im Antwortsatz mit der Angabe der „Spannweite der Brücke“ (und nicht des mathematischen Ergebnisses) sollte eine verkürzte Anzahl Dezimalstellen auftreten. Die Tabelle zeigt die Ergebnisse auf diese Frage. Statt nach Noten der Schülerinnen und Schüler wird nun nach den bei der Korrektur vergebenen Punkten differenziert.

Tabelle 8 – 17. Wird eine unterschiedliche Anzahl von Dezimalstellen bei der mathematischen Lösung und bei der Angabe der Spannweite angegeben? - MSA-4g und MSA-Gy-4c – „Spannweite der Bogenbrücke“:

Gymnasium:

	0 Punkte	1 Punkt	2 Punkte	3 Punkte	4 Punkte	gesamt
ja	0	0	0	1	4	5
nein	3	2	1	10	22	38
nicht erkennbar weil: Aufgabe nicht bearbeitet, kein Antwortsatz, keine Lösung, etc.	20	3	5	1	2	31
gesamt (Auswahl: je eine „starke“, „mittlere“, schwache“ Arbeit pro Klasse)	**23**	**5**	**6**	**12**	**28**	**74**

Gesamtschule:

	0 Punkte	1 Punkt	2 Punkte	3 Punkte	4 Punkte	gesamt
ja	0	1	1	0	0	2
nein	1	1	1	1	7	11
nicht erkennbar weil: Aufgabe nicht bearbeitet, kein Antwortsatz, keine Lösung, etc.	15	1	1	0	0	17
gesamt (Auswahl: je eine „starke“, „mittlere“, schwache“ Arbeit pro Klasse)	**16**	**3**	**3**	**1**	**7**	**30**

Bemerkenswert an dieser Gegenüberstellung ist zweierlei. Erstens ändern die Schülerinnen und Schüler kaum die Darstellung, wenn sie ihr Ergebnis in die Realität transportieren („interpretieren“ im Sinne des Modellierungskreislaufs). Im Mathematikunterricht scheint dies offenbar wenig geschult zu werden. Das wird – zweitens – indirekt bestätigt, denn die

Lehrerinnen und Lehrer bewerten die unveränderte Übernahme des mathematischen Ergebnisses in die Antwort keineswegs negativ.

8.6 MSA-Gy-4c – „Korbwurf“: Prozesse des Argumentierens und Kommunizierens

Die Aufgabe „Korbwurf“ kommt nur in der gymnasialen Prüfung vor. Nach dem für das Land repräsentativen Datensatz „Modul 2“ ist dies die schwierigste Aufgabe der ZP-10 am Gymnasium mit 5,7 % vollständigen Lösungen (Tab. 2-27). Tab. 8-18 zeigt, dass unter den ausgewählten kompletten Schülerlösungen 10,8 % vollständig gelöste Aufgaben vorliegen, so dass eine hinreichende Variationsbreite in den Ansätzen beobachtet werden kann.

Der Aufgabe wurde in Kap. 4.2 das Aufgabenmerkmal „konzeptuelles Durchdringen komplexer Situationen“ zugewiesen. Sie nimmt also eine wichtige Funktion im Gefüge der ZP-10 für das Gymnasium ein, denn mit ihr werden hochwertige mathematische Tätigkeiten und zentrale prozessbezogene Kompetenzen erfasst. Inwieweit dies mit diesem Aufgabentypus gelingt ist ein weit über die ZP-10 hinausreichendes Problem. Daher wird diese Aufgabe ausführlicher als die anderen besprochen. Es geht dabei darum, wie die Schülerinnen und Schüler mit dieser Aufgabe, die offenbar ein spezielles Format – *Beschreibungsaufgabe*, *Explikationsaufgabe* – hat und auf spezifische prozessbezogene Kompetenzen – Argumentieren und Kommunizieren – abzielt, umgehen und wie sich die Lehrerinnen und Lehrer bei den Korrekturen verhalten. Der Vergleich mit Aufgaben verwandter Charakteristik kann helfen, zu einem Gesamtbild zu kommen.

MSA-Gy-3c - „Korbwurf“
Um die Technik der Spieler weiter zu verbessern, werden die Würfe mit Hilfe eines Videogerätes aufgezeichnet. Hier siehst du eine sogenannte Stroboskopaufnahme, bei welcher der Ball an verschiedenen Positionen in der Luft gezeigt wird.

Flugbahnen von Bällen können näherungsweise durch quadratische Funktionen beschrieben werden. Aus dem Bild kann bestimmt werden, ob der Ball in den Korb treffen kann oder nicht.

Beschreibe – ohne zu rechnen – ein mögliches Vorgehen, mit dem das untersucht werden kann. Nenne auch die dazu notwendigen mathematischen Methoden.

8.6.1 *Zu den prozessbezogenen Kompetenzen für diese Aufgabe: Argumentieren/Kommunizieren*

Der sog. Kompetenzmatrix in den Vorgaben des Ministeriums für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen folgend kann man die Aufgabe zweifach innerhalb der prozessbezogenen Kompetenz Argumentieren/Kommunizieren verorten. Es sind laut den Vorgaben die „Erläuterung mathematischer Zusammenhänge mit eigenen Worten und geeigneten Fachbegriffen beim Umgang mit linearen oder quadratischen Gleichungen“ angesprochen und die Fähigkeit zum Verstehen „von grafischen Darstellungen funktionaler Zusammenhänge“. Die prozessbezogenen Kompetenzen des Argumentierens und Kommunizierens stehen also bei der Intention dieser Aufgabe im Vordergrund. In den Lehrplänen des Landes Nordrhein-Westfalen werden die prozessbezogenen Kompetenzen Argumentieren und Kommunizieren auf der oberen Ebene nicht weiter unterschieden. Für die Analyse dieser Aufgabe lohnt jedoch eine genauere Bestimmung beider Begriffe.

In der Tradition mathematikdidaktischer Forschung wird Argumentieren i.w. „verstanden als eine didaktische Kategorie für das Erfassen von Beweisen und beweisähnlichen Aktivitäten, [als] schulspezifische Vorform des Beweisens und/oder [als] ‚moderne' Sicht auf das Beweisverständnis in der Mathematik“ (Krummheuer, 2003, S. 257). Man kann aber auch, „weit grundsätzlicher“, wie Krummheuer sagt (2003, S. 257), und viel allgemeiner, dem Argumentieren die Funktion zuschreiben, dass durch „die Partizipation der Schüler an ‚kollektiven Argumentationen‘ […] Mathematiklernen in der Unterrichtsinteraktion überhaupt erst ermöglicht [wird]. Argumentieren ist hier dann eine Bedingung des Lernens (‚argumentatives Lernen‘) und nicht ein curricular als erstrebenswert angesehenes Ziel (‚Argumentieren Lernen‘)“ (Krummheuer, 2003, S. 257). Die kommunikativen Aspekte des Argumentierens werden damit durchaus als konstitutiv begriffen, wenngleich allein die Kommunikation das Argumentieren als solches eben gerade nicht aufhebt (Sfard, 2003).

In den Kompetenzerwartungen der Kernlehrpläne von Nordrhein-Westfalen am Ende der Jahrgangsstufe 10 tritt Argumentieren als Kompetenz bemerkenswerterweise nicht separat auf. Es ist immer von der Koppelung „Argumentieren/Kommunizieren“ als *einer* zentralen prozessbezogene Kompetenz die Rede. Es finden zwar Differenzierungen in Teilkompetenzen statt, nämlich in Lesen, Verbalisieren, Kommunizieren, Präsentieren, Vernetzen und Begründen. Das Begründen, als dem „klassischen“ Argumentieren nächststehend, bleibt aber recht blass: „Schülerinnen und Schüler nutzen mathematisches Wissen und mathematische Symbole für Begründungen und Argumentationsketten“. Der Begriff „Beweis“ kommt im Gymnasiallehrplan nicht explizit vor. Auch die Erläuterungen zu den Bildungsstandards von Blum & al. (2006) sehen die häufig auftretende „Schwierigkeit, Kommunizieren und Argumentieren voneinander abzugrenzen“ (Blum & al., 2006, S. 48). Dort ist der traditionelle Begriff der mathematischen Argumentation – allerdings auch in eher abgeschwächten Formulierungen – in einer vom Kommunizieren separierten Kompetenz untergebracht.

Konsequenterweise enthält daher die ZP-10 für das Gymnasium keine ausdrücklichen Beweisaufgaben (vgl. auch Kap. 3.2.8.2), auch keine Aufgaben, die Argumentieren im eingangs erwähnten traditionellen Sinn erfordern. An deren Stelle treten Explikationsaufgaben wie die „Korbwurf“-Aufgabe. In ihnen dominiert die Anweisung: „Beschreibe ohne zu rechnen“ oder „Erkläre“. Wir werden in diesem Abschnitt daher auch noch die Aufgabe MSA-4d2 bzw. MSA-Gy-4a2 heranziehen, in der ebenfalls eine Beschreibungs- und Begründungsleistung gefordert wird, nämlich zu erklären, warum bestimmte Funktionsgleichungen nicht in Frage kommen, um die Parabelform des Tragseils einer vorgegebenen Hängebrücke zu beschreiben, sowie die Aufgabe MSA-2c bzw. MSA-Gy-2b, die zur Bestimmung der bewässerten Fläche eines rechteckigen Feldes ebenfalls die Anweisung „Beschreibe ohne zu rechnen“ gibt.

Für solche Aufgaben, die auf „Argumentieren/Kommunizieren“ zielen, ergeben sich zwei grundsätzliche Problematiken.

Die eine liegt auf sehr allgemeiner Ebene: Vom curricular-normativen Standpunkt aus ist es bedenkenswert, wenn die – von den Lernprozessen her (siehe oben: Krummheuer, 2003) ebenso wie von den spezifischen Charakteristika des Faches Mathematik her (vgl. Kap.5 des BLK-Gutachtens (BLK, 1997), das zur Grundlegung des SINUS-Projekts erstellt wurde) – zentrale Kompetenz des Begründens und Beweisens so eng verbunden mit seiner kommunikativen Funktionalität gesehen wird. Diese Bedenken betreffen sowohl die Kernlehrpläne in Nordrhein-Westfalen (und vielen anderen Bundesländern), wie auch die bundeseinheitlichen Bildungsstandards. Die Tendenz, es bei diesen curricular-normativen Vorgaben in der Praxis der zentralen Prüfungen allein bei den kommunikativen Aktivitäten zu belassen, ist gerade in der Aufgabenverteilung der ZP-10 durchaus zu erkennen. Das wird zwangsläufig Rückwirkungen auf die Gestaltung des Mathematikunterrichts haben.

Auf der spezielleren Ebene der Aufgabenanalyse sowie der Analysen von Schülerbearbeitungen und Lehrer-Korrekturen, die wir hier einnehmen, tritt ein weiterer Effekt dazu: Inwieweit ist den Schülerinnen und Schülern bei Aufgaben, die sich den prozessbezogenen Kompetenzen des Argumentierens und Kommunizierens widmen sollen, einsehbar, ob und ggf. welche Art von Begründung von ihnen verlangt wird? Wo finden sich für die Lehrerinnen und Lehrer genug aussagekräftige Orientierungsmarken, von denen aus die Adäquatheit einer Argumentation eingeschätzt werden kann? Diese spezifische Problematik werden wir an ausgewählten Schülerbearbeitungen und am Korrekturverhalten der Lehrerinnen und Lehrer deutlich aufzeigen können.

8.6.2 Schülerlösungen zur „Korbwurf“-Aufgabe

Die „Korbwurf“-Aufgabe wurde von den Schülerinnen und Schülern, von denen uns komplette Lösungen vorliegen, von den Lehrerinnen und Lehrern so bewertet[57] :

Tabelle 8 – 18. Punkteverteilung (Gymnasium) - MSA-Gy-3c – „Korbwurf“:

	0 Punkte	1 Punkt	2 Punkte	3 Punkte	4 Punkte	5 Punkte	gesamt
Häufigkeit absolut	15	14	19	11	7	8	74
Häufigkeit in %	20,3	18,9	25,7	14,9	9,5	10,8	100,0

(Auswahl: je eine „starke“, „mittlere“, schwache“ Arbeit pro Klasse)

Von den 15 Schülerinnen und Schülern mit 0 Punkten haben 5 die Aufgabe gar nicht bearbeitet. Die erste Auffälligkeit besteht bereits darin, dass die Punkte extrem gleichmäßig über das ganze Punkte-Spektrum verteilt sind. Dies deutet auf eine gewisse Unsicherheit im Bewerten sowohl ganz richtiger wie ganz falscher Lösungen. Und diese Unsicherheit ist durchaus berechtigt. Dafür gibt es zwei Gründe, die Vielfalt der Strategien der Schülerinnen und Schüler und die hinsichtlich der prozessbezogene Kompetenzen unklaren Korrekturanweisungen. Die Vielfältigkeit der Schülerbearbeitungen zeigen wir zunächst auf, dem Korrekturverhalten ist der folgende Abschnitt gewidmet.

Die Lösungen der Schülerinnen und Schüler reichen von ausführlichen Beschreibungen bis zu kurzen Andeutungen, die nicht viel mehr sind als eine Wiederholung der Aufgabenstellung. Wir beginnen mit einer ausführlichen, im Ton gewissermaßen „journalistisch“ gehaltenen Beschreibung:

[57] Hier: 100% = 74, da drei Bewertungsprotokolle fehlen; s.o..

Es ist eine Möglichkeit den Ball am höchsten Punkt
seiner Flugbahn an einer senkrecht gezogenen
Achse zu spiegeln und anschließend die gespie-
gelten Bälle miteinander zu verbinden. ✓
Verläuft diese Verbindungslinie durch den Korb
wird der Ball treffen. ✓
Rechnerisch ist durch die Bestimmung des
Scheitelpunkts mit Hilfe eines Koordinatensystem
eine Berechnung möglich. Der Korb stellt hierbei
den Punkt P dar. Liegt dieser auf der Parabel, trifft
der Ball in den Korb. ✓
Hierbei wird die Scheitelpunktsform
$f(x) \rightarrow d \cdot (x-e)^2 + f$ benötigt. ✓
Das Koordinatensystem benötigt einen geeigneten
Maßstab (1 mm = 1 Einheit). So kann ermittelt
werden, ob die Koordinaten des Punktes auf der
Parabel liegen. ✓
Auch möglich ist es, die Parabel nach- bzw. weiter-
zu zeichnen. Diese Möglichkeit ist allerdings eher
ungenau.

Gymnasium – „sehr gut“

Diese Lösung wird von den beiden Korrektoren übereinstimmend mit der vollen Punktzahl bewertet. Dennoch ist keinerlei wirklich explizit rechnerisch durchführbare Methode angegeben: Es ist nicht beschrieben, dass und wie man die Koeffizienten *d*, *e* und *f* berechnen soll, dass ein Gleichungssystem mit den drei Unbekannten *d*, *e* und *f* entsteht, dass man überlegen muss, ob dieses überhaupt lösbar ist. Die im Aufgabentext geforderte „Nennung der notwendigen mathematischen Methoden“ wird durch Anschreiben der Scheitelform der quadratischen Funktion eingelöst. Ansonsten bleibt es bei unspezifischen Hinweisen. Es wäre allerdings auch eine andere Interpretation dieser speziellen Schülerlösung möglich: Mit dem im ersten Satz beschriebenen Verfahren der Spiegelung am Scheitel wird versucht, tatsächlich eine “mathematische Methode“ zu erfinden. Durch systematische Spiegelungen von solchen Punkten, die man relativ genau, d.h. im Rahmen der durch die Ballgröße ohnehin bestehenden Ungenauigkeiten, bestimmen kann, findet man immer mehr Punkte der Flugbahn, so dass man recht verlässlich die Parabel zeichnerisch rekonstruieren könnte. Es ist beides unklar, ob bei der Schülerlösung überhaupt so gedacht wurde – und dann tatsächlich einer systematischen, nicht-rechnerischen, jedoch „mathematischen“ Methode gefolgt wird, und ob die korrigierenden Lehrerinnen und Lehrer tatsächlich diese Methode bepunkteten. Im Korrekturprotokoll ist jedenfalls verzeichnet, dass „ein anderer Weg“ beschritten worden sei.

Die nächste Lösung ist ganz allgemein formuliert und von „mathematischen Methoden“ ist allenfalls verdeckt zu erkennen, dass man ein Koordinatensystem benötigt, denn sonst könnte nicht von (0|0) gesprochen werden. Offenbar werden bereits dies und der (hier belanglose) Hinweis auf die nach unten geöffnete Parabel als Elemente der Beschreibung anerkannt, denn unter der Rubrik „wählt einen anderen Lösungsweg“ werden 2 Punkte vergeben.

> c) Ich würde dafür eine Parabel verwenden, die nach unten geöffnet ist. Je länger die Flugbahn des Balles ist, desto weiter wird die Parabel. Eine der Nullstellen sollte durch den Punkt (0|0) gehen, dies ist der Punkt, wo der Spieler steht und den Ball wirft.

Gymnasium – „befriedigend“

Es gibt auch offensichtlich unzureichende Beschreibungen, die dann auch eine Bewertung mit 0 Punkten nach sich ziehen:

> Der Ball muss in der Mitte seiner Flugbahn die maximale Höhe erreichen, um am Ende im Korb zu landen

Gymnasium – „befriedigend“

Darüber hinaus gibt es physikalische[58] Fehlvorstellungen über den gesamten Vorgang, etwa diese:

> Wenn der Ball genau in der Mitte von Korb und Spieler am höchsten ist bzw. seinen Scheitelpunkt erreicht, trifft der Ball in den Korb
>
> $y = d \cdot (x - e)^2 + f$
>
> Koordinatensystem!
> Scheitelpunkt schätzen!
> Punkte prüfen!
> Koordinaten des Korbes!

Gymnasium – „mangelhaft“

Dennoch wird für diese Lösung – unter der Rubrik: „Wählt einen anderen Lösungsweg“ – von beiden Korrektoren 1 Punkt vergeben, offenbar für das Anschreiben der Scheitelform der Parabel oder für die Erwähnung des Wortes „Scheitel“. Rechts unten in der Kopie stehen die Korrektur-Kommentare: Es ist offensichtlich, dass bei der Korrektur versucht wurde, den Bepunktungskriterien (siehe unten) möglichst präzise zu folgen, obwohl keiner der dort beispielhaft gegebenen Lösungswege eingehalten ist.

Wenn man die Strategien der Schülerinnen und Schüler zu klassifizieren versucht, findet man außerordentlich viele unterschiedliche Zugangsweisen. Es ist hier nicht der Ort, diesen im Einzelnen nachzugehen, obwohl dies unter der Perspektive, Denkprozesse von

[58] Dies ist abermals ein Verweis darauf, dass Wissen über die Sache selbst unabdingbar für Modellierungsaufgaben ist, und nicht ohne weiteres vorausgesetzt werden kann; vgl. Kap. 5.2, nun mit physikalischem Sachwissen anstelle von sozial-politischem System-Wissen.

Schülerinnen und Schülern zu erforschen, lohnenswert wäre. Hervorzuheben sind hier exemplarisch aber einige auffällige Häufungen:

- Immerhin wird von knapp einem Drittel der Schülerinnen und Schüler (23; 29,9 %) eine Parabel freihändig durch die Ballpositionen skizziert, mit oder ohne weitere Verwendung in der Beschreibung.
- 6 (7,8 %) Schülerinnen und Schüler äußern die (gegenüber der oben gezeigten weitere) Fehlvorstellung, dass die Position des dritten („höchsten") Balles den Scheitel der Flugbahn markiert.
- Insgesamt wird von 21 Schülerinnen und Schülern (27,2 %), erfolgreich oder nicht, die Berechnung mittels des Scheitels in Betracht gezogen.

Betrachtet man diese Vielzahl an Strategien und Herangehensweisen (weitere Lösungen folgen unten), dann erkennt man zunächst die Unklarheiten in den Anweisungen im Aufgabentext:

- Hinter „Beschreibe ein mögliches Vorgehen" wird von den Schülerinnen und Schülern nicht notwendig die Frage nach einem „Argument" gesehen;
- „Nenne mathematische Methoden" kann auch verstanden werden als Aufforderung, Fachbegriffe zu erwähnen;
- es ist vielen Schülerinnen und Schüler offenbar unklar, wie detailliert die Beschreibung sein soll.

Man kann diese Unklarheiten auch so deuten: Den Schülerinnen und Schülern ist nicht vertraut, wie sie mit Aufgaben zu den von ihnen per Kernlehrplan erwarteten prozessbezogenen Kompetenzen des Argumentierens / Kommunizierens umgehen sollen. Sie können keinen Unterschied erkennen, wann ein „Argument", d.h. die begründete(!) Beschreibung des Vorgehens gefordert ist, wann nur eine Mitteilung, wie man vorgehen kann. Den Schülerinnen und Schülern selbst ist das nicht anzulasten. Sie verhalten sich konform im Kontext der Kernlehrpläne, die hier auch nicht differenzieren.

Im übernächsten Abschnitt wird man erkennen, dass präziser formulierte Beschreibungsaufgaben durchaus zu anderem Lösungsverhalten der Schülerinnen und Schüler führen können.

8.6.3 Prozessbezogene Kompetenzen in den Auswertungsanleitungen

Allein die bereits genannten sehr vielfältigen Zugangsweisen und Gedanken der Schülerinnen und Schüler zeigen, dass die korrigierenden Lehrerinnen und Lehrer vor großen Herausforderungen stehen. Sie werden also auf die Hinweise zur Korrektur angewiesen sein. Es muss ihnen mitgeteilt werden, wie der subtile Unterschied zwischen einem nur mitteilenden und einem argumentativen Beschreiben korrekturmäßig zu behandeln ist. Es steht schon nach der obigen exemplarischen Betrachtung einiger Schülerlösungen fest, dass die Auswertungsanleitungen sich dabei nicht ausschließlich auf Beispiele beschränken können, denn dazu sind die Lösungsvarianten der Schülerinnen und Schüler zu vielfältig. Man sollte „Prinzipien" erwarten, wie die prozessbezogene Kompetenzen Argumentieren und/oder Kommunizieren differenziert in den Bewertungen abzubilden sind.

Die Korrekturhinweise – wie immer aufgeteilt in sog. „Kriterien" in der linken Spalte und beispielhafte Lösungsskizzen in der rechten Spalte – lauten für diese Aufgabe wie folgt (siehe auch Anhang):

Abbildung 8 – 19. Auswertungsanleitungen zur Aufgabe MSA-Gy-4c – „Korbwurf“

ausführliche Version

<table>
<tr><td>der Prüfling gibt an, dass</td><td rowspan="6">z. B.: „Im ersten Schritt wird ein Koordinatensystem in das Bild gelegt. Mit dessen Hilfe kann man die Koordinaten der Ballpositionen bestimmen. Eine Parabel wird durch drei Punkte eindeutig bestimmt. Die Flugbahn wird durch $y = ax^2 + bx + c$ beschrieben. Durch Einsetzen der Koordinaten der drei Punkte (Ballpositionen) erhält man ein Gleichungssystem mit drei Unbekannten. Dieses ist eindeutig zu lösen, man erhält Werte für a, b und c. Es muss dann noch geprüft werden, ob die Koordinaten des Korbes die Parabelgleichung erfüllen.“

Es werden auch alternative Lösungen akzeptiert, wie z. B.: „Vorab legt man ein Koordinatensystem in das Bild. Man kann dann die Lage des Scheitelpunktes schätzen und dann mit Hilfe eines weiteren Punktes eine Parabelgleichung bestimmen. Durch Einsetzen wird geprüft, ob die anderen gegebenen Punkte auch auf der Parabel liegen. Es muss dann noch geprüft werden, ob die Koordinaten des Korbes die Parabelgleichung erfüllen.“</td><td></td></tr>
<tr><td>ein Koordinatensystem notwendig ist</td><td>1</td></tr>
<tr><td>die Koordinaten abgelesen werden müssen</td><td>1</td></tr>
<tr><td>eine quadratische Gleichung bestimmt werden muss</td><td>1</td></tr>
<tr><td>die Gleichung mit Hilfe der Koordinaten bestimmt wird</td><td>1</td></tr>
<tr><td>die Korbkoordinaten in Beziehung zur Flugbahn gesetzt werden müssen</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2">wählt einen anderen Lösungsweg, der sachlich richtig ist</td><td>5</td></tr>
</table>

Kurzversion, in die die Punkte der Korrektoren eingetragen werden müssen:

	Vorschlag	*Erstkorrektor*	*Zweitkorrektor*
… ein Koordinatensystem notwendig ist …	1		
… die Koordinaten abgelesen …	1		
… quadratische Gleichung bestimmt …	1		
... die Gleichung … bestimmt wird …	1		
… in Beziehung zur Flugbahn …	1		
wählt einen anderen Lösungsweg, …	(5)		

Die Korrektoren halten sich etwa zur Hälfte an die Vergabe der Punkte laut den fünf vorgegebenen Kriterien, zur anderen Hälfte werden die Punkte zusammengefasst in die Zeile „wählt einen anderen Lösungsweg ...“ eingetragen.

Auf den ersten Blick scheint in der Auswertungsanleitung zur „Korbwurf“-Aufgabe die Beschreibung zweier Beispiele zu dominieren. In der linken Spalte findet man aber auch allgemeine Kriterien. Welche Wertigkeit haben diese, wenn man als Orientierung die in der Aufgabe angestrebten prozessbezogenen Kompetenzen nimmt? Sind es einzelne Kompetenzen, die notwendig sind, die Aufgabe zu lösen, oder sind es Schritte innerhalb eines allenfalls zu variierenden, aber in seiner Grundstruktur nicht zu verlassenden rechnerischen(!) Lösungswegs? Die Antwort hängt von der kompetenzorientierten Sicht auf die Aufgabe ab:

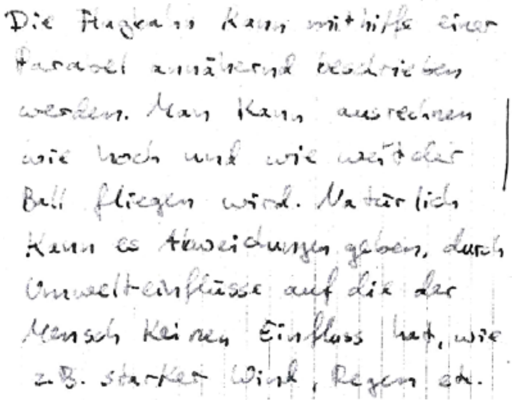
(a) Betont man die Kompetenz des *Kommunizierens*, dann genügt es nach dem Text der Aufgabe, dass „ein mögliches Vorgehen“ beschrieben wird. Die angegebenen Kriterien sind darauf durchaus anwendbar, sie stellen aber eben nichts anderes dar als Schritte eines Lösungsweges. Von den Schülerinnen und Schülern wird mit diesen Anleitungen (rückwirkend) genau ein solches Nachvollziehen einer rechnerischen Lösung verlangt. Es entsteht aber ein neues Problem: Wie sehr soll sich die Beschreibung der Schülerinnen und Schüler auf die prozedurale Ebene einlassen: Sollen die Begriffe (genügen schon die „Worte"?) Unbekannte, Gleichung, Gleichungssystem, Lösung, Koordinaten, etc. wirklich ausdrücklich fallen, soll gar explizit ein Gleichungssystem angeschrieben (freilich nicht gelöst) werden, soll wenigstens eine Funktionsgleichung für die Parabel angeschrieben werden? Die Auswertungsanweisungen bleiben hier unbestimmt. Zudem beziehen sich die Kriterien auf eine bestimmte Kategorie von Lösungen des Problems, nämlich ausschließlich auf das rechnerische Vorgehen. Zeichnerische Methoden (wie oben bei der „journalistischen" Lösung angedeutet) oder (denkbare, jedoch realistischerweise nicht zu erwartende) Lösungen mit Technologieunterstützung (etwa Scans mit Funktionenerkennungssoftware) können auf diese Weise nicht beurteilt werden. – Die unten folgenden drei Lösungen aus einer Klasse mit ein und demselben Korrektoren-Team zeigen die hier genannten Unbestimmtheiten direkt auf.

(b) Betont man hingegen die Kompetenz des *Argumentierens*, scheint man mit den angegebenen Kriterien grundsätzlich nicht auszukommen. Dann stehen nämlich andere Fragen bei dieser Aufgabe zur Debatte (selbst bei Beibehaltung des vorliegenden Aufgabentextes): Die Flugbahn kann nur deshalb beschrieben werden, weil drei Positionen des Balls mit dem Stroboskop festgehalten sind und dies für eine Parabelbestimmung genügt. Wird deshalb von den Schülerinnen und Schülern ein Hinweis erwartet, dass drei Punkte eine Parabel bestimmen? Wird erwartet, dass sie – in der Altersstufe angemessener Form - mathematisch begründen, dass das sich ergebende Gleichungssystem aus drei Gleichungen lösbar ist? Die Auswertungsanweisungen erwähnen diesen Kern der Begründung zwar in der Darstellung der Beispiele, aber nicht in den Kriterien. Soll – weiter – von den Schülerinnen und Schülern eine Begründung gegeben werden, dass erst ein Koordinatensystem rechnerisches Vorgehen überhaupt erlaubt? Einige Kriterien scheinen in diese Richtung zu deuten, aber ausdrücklich auf Begründungen dafür zu achten, ist den Korrektoren nicht aufgegeben; sie halten sich auch nicht daran, wie schon die obigen Beispiele zeigten.

8.6.4 Exemplarisches zu den Korrekturen der Lehrerinnen und Lehrer

Drei Schülerbearbeitungen aus ein und derselben Klasse zeigen auf, wie schwer sich ein Korrektoren-Team mit einer gleichmäßigen Bewertung tun kann.

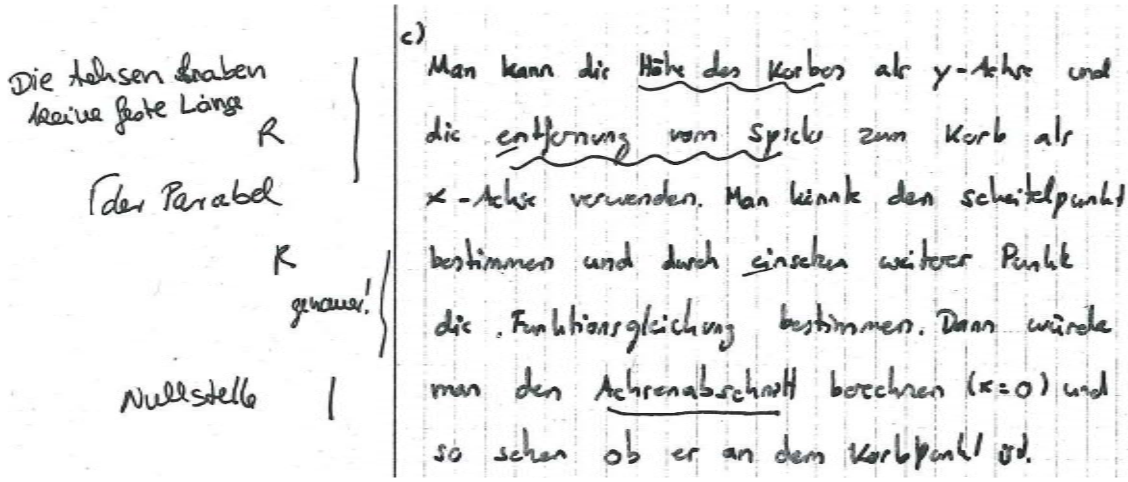
Die erste Schülerlösung zielt weniger auf die Beschreibung einer mathematischen Methode ab, denn auf die Nennung eines passenden Modells („annähernd eine Parabel") und den Hinweis, dass bei Modellen naturgemäß mit „Abweichungen" zu rechnen sei. An der Stelle des Strichs am rechten Rand notiert die Lehrkraft: „Wie genau?". Beide Korrektoren geben übereinstimmend o Punkte. (Wegen der schlechten Lesbarkeit folgt der Schülertext auch ausgeschrieben.)


Die Flugbahn kann mithilfe einer Parabel annähernd beschrieben werden. Man kann ausrechnen wie hoch und wie weit der Ball fliegen wird. Natürlich kann es Abweichungen geben, durch Umwelteinflüsse auf die der Mensch keinen Einfluss hat, wie z.B. starker Wind, Regen etc.

Die Flugbahn kann mit Hilfe einer Parabel annähernd beschrieben werden. Man kann ausrechnen, wie hoch und wie weit der Ball fliegen wird. Natürlich kann es Abweichungen geben, durch Umwelteinflüsse auf die der Mensch keinen Einfluss hat, wie z.B. starker Wind, Regen, etc.

Gymnasium – „ausreichend“

Auf die zweite Lösung aus dieser Klasse werden von den Korrektoren einhellig 3 Punkte der max. 5 möglichen vergeben, und zwar für die Kriterien „Koordinatensystem notwendig“, „quadratische Gleichung bestimmen“ und „in Beziehung zur Flugbahn setzen“. (Links stehen die Kommentare bei der Korrektur.)


Die Achsen haben keine feste Länge R

der Parabel

R

genauer!

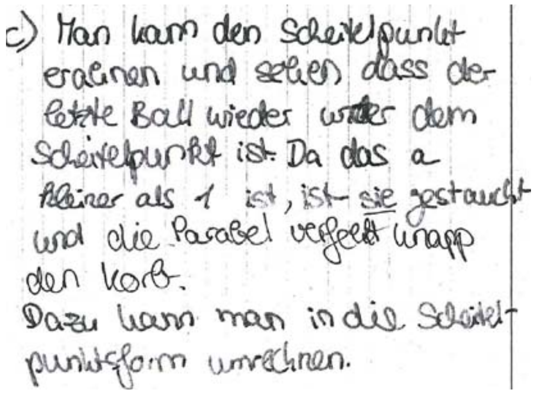
Nullstelle

c) Man kann die Höhe des Korbes als y-Achse und die entfernung vom Spieler zum Korb als x-Achse verwenden. Man könnt den scheitelpunkt bestimmen und durch einsetzen weiterer Punkt die Funktionsgleichung bestimmen. Dann würde man den Achsenabschnitt berechnen (x=0) und so sehen ob er an dem Korbpunkt ist.

Gymnasium – „sehr gut“

Diese Lösung ist nun gegenüber der vorherigen ziemlich detailliert. Der Prüfling verwechselt zwar, wie auch moniert wird, „Achsen“ mit bestimmten Strecken, aber es ist dennoch klar, dass er eine waagrechte (möglicherweise auf der Höhe der Hände(?) des Spielers befindliche) x-Achse und eine durch die Position des Korbes verlaufende y-Achse meint. Es bleibt unausgesprochen, wird aber bepunktet, dass diese ein Koordinatensystem bilden. Der letzte Satz sagt genau, wie man rechnerisch prüfen soll, ob der Korb getroffen wird: Es ist bei der gewählten y-Achse tatsächlich der „Achsenabschnitt“ (ungewöhnlicher Ausdruck bei Parabeln, aber hier sinngemäß von Geraden übernommen: Wert bei x=0) und nicht die Nullstelle, die der Korrektor anmahnt. Was also fehlt? Offenbar nur die explizite Beschreibung des Gleichungssystems bzw. ein geeigneter Ansatz für die Funktionsgleichung der Parabel. Die Tatsache, dass es um die Bestimmung der Funktionsgleichung geht, ist aber aus dem Text klar, es wird sogar die Prozedur des Einsetzens erwähnt. Begründungen allerdings, dass die Methode zum Ziel führen „muss“, findet man nicht.

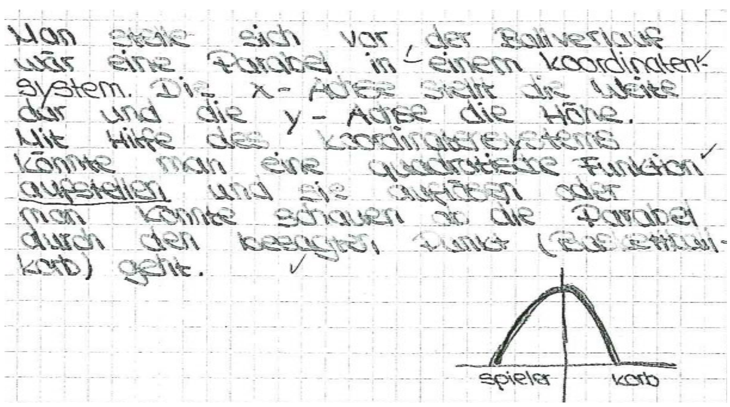
Die dritte Lösung aus dieser Klasse ist ganz kurz, und verbleibt vollständig im Vagen. Dennoch wird hierfür 1 Punkt vergeben. Das von den Korrektoren als gültig angekreuzte Kriterium ist „... in Beziehung zur Flugbahn“, womit man offenbart honoriert, dass Fachbegriffe für parabelförmige Kurven genannt werden und das Urteil „verfehlt knapp den Korb“ gefällt wird.


c) Man kann den Scheitelpunkt errechnen und sehen dass der letzte Ball wieder unter dem Scheitelpunkt ist. Da das a kleiner als 1 ist, ist sie gestaucht und die Parabel verfehlt knapp den Korb.
Dazu kann man in die Scheitelpunktsform umrechnen.

Gymnasium – „befriedigend“

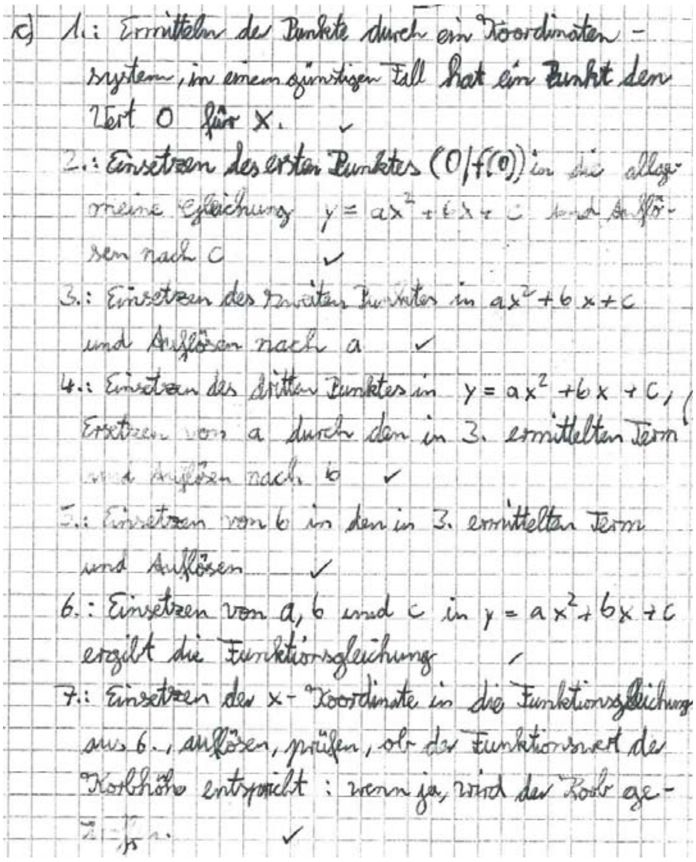
Es gibt zwei durchgehende Maximen, an die sich die Korrektoren in dieser Klasse halten, und sie sind darin gut vergleichbar zu den anderen Korrektoren: Sie verstehen die Aufgabe eindeutig als Aufgabe zur prozessbezogenen Kompetenz des Kommunizierens und sie versuchen stets, möglichst präzise den vorgegebenen Kriterien zu folgen. Daher gibt es Punktabzüge immer dann, wenn nicht explizit genug das zugehörige Gleichungssystem angegeben wird und die tatsächlich durchzuführenden rechnerischen Schritte nicht detailliert genug beschrieben werden. Ob Elemente der Kriterien in sprachlicher Form kommen, wird i.a. nicht vollständig anerkannt, wie man etwa im Vergleich mit der im vorherigen Abschnitt gegebenen Lösung mit voller Punktzahl sehen kann. Dort ist ebenso wenig wie hier eine Methode für die Berechnung angegeben, aber allein die Nennung der Funktionsgleichung in algebraischer Form scheint zu genügen.

Andererseits finden sich gewisse Korrektoren-Teams auch mit beschreibendem Vorgehen ab. So werden auf die folgende Lösung 4 Punkte vergeben. Der Erstkorrektor verweigert lediglich das Kriterium „Gleichung wird bestimmt“, der Zweitkorrektor gibt summarisch 4 Punkte, ist aber der Meinung, es werde „ein anderen Lösungsweg“ gewählt. Die Lösung selbst ist ausschließlich verbal-beschreibend und geht auf mathematische Methoden nicht ein.


Man stelle sich vor, der Ballverlauf wär eine Parabel in einem koordinaten-system. Die x-Achse stellt die Weite dar und die y-Achse die Höhe.
Mit Hilfe des Koordinatensystems könnte man eine quadratische Funktion aufstellen und sie auflösen oder man könnte schauen ob die Parabel durch den besagten Punkt (Basketballkorb) geht.

Gymnasium – „ausreichend“

Begründungen im engeren Sinne scheinen die Lehrerinnen und Lehrer nicht zu erwarten. Aber in der folgenden Schülerbearbeitung (und auch in einer weiteren vergleichbaren) werden sie dennoch gegeben. Die Begründungen erfolgen allerdings auf prozeduraler Ebene (mit marginalen Schwächen). Sie sind vollständig, indem nicht auf fertiges Wissen zurückgegriffen, sondern der Satz, durch drei Punkte werde eine Parabel eindeutig bestimmt, gewissermaßen bewiesen wird. Insofern sieht man in dieser Schülerlösung Argumentieren auf dem Niveau einer Reflexion über einen nicht nur möglichen, sondern auch wirklich durchführbaren rechnerischen Lösungsweg. Es wurde die volle Punktzahl vergeben, und zwar in Bezug zu allen fünf vergebenen Kriterien.


c) 1.: Ermitteln der Punkte durch ein Koordinaten-system, in einem günstigen Fall hat ein Punkt den Wert 0 für x.
2.: Einsetzen des ersten Punktes (0|f(0)) in die allgemeine Gleichung $y = ax^2+bx+c$ und Auflösen nach c
3.: Einsetzen des zweiten Punktes in ax^2+bx+c und Auflösen nach a
4.: Einsetzen des dritten Punktes in $y = ax^2+bx+c$, Ersetzen von a durch den in 3. ermittelten Term und Auflösen nach b
5.: Einsetzen von b in den in 3. ermittelten Term und Auflösen
6.: Einsetzen von a, b und c in $y = ax^2+bx+c$ ergibt die Funktionsgleichung
7.: Einsetzen der x-Koordinate in die Funktionsgleichung aus 6., auflösen, prüfen, ob der Funktionswert der Korbhöhe entspricht: wenn ja, wird der Korb getroffen.

Gymnasium – „sehr gut“

Es bleibt offen, ob den Aufgabenstellern wirklich eine Lösung dieses Grades an Detailliertheit als Ideal vorschwebte. Unter den Schülerlösungen finden wir eine weitere derartig detaillierte Lösung, in der das in den Auswertungsanleitungen beschriebene zweite Verfahrensbeispiel ausgearbeitet wird. Die Auswertungsanleitungen selbst sind allerdings weit weniger ausgearbeitet.

Es ist diese schwer einzuhaltende Balance zwischen einer rein verbalen Beschreibung und einem detaillierten Aufzeigen der einzelnen Rechenschritte, die diese Aufgabe unklar in den Augen der Schülerinnen und Schüler und schwer zu bewerten im Korrekturverhalten der Lehrerinnen und Lehrer macht. Es liegt dabei an beidem, der Formulierung des Aufgabentextes und der Kompliziertheit der mathematischen Situation, die beschrieben werden soll. Deshalb ist ein kurzer Vergleich mit anderen derartigen Explikationsaufgaben sinnvoll. Auf alle diese Aufgaben wirkt nämlich auch der „argumentative Habitus“ in der Klasse ein, also inwieweit in einer Klasse über das Kommunizieren hinaus ein argumentierendes Verhalten gepflegt und von den Lehrerinnen und Lehrern anerkannt wird (vgl. Krummheuer, 2003; siehe oben).

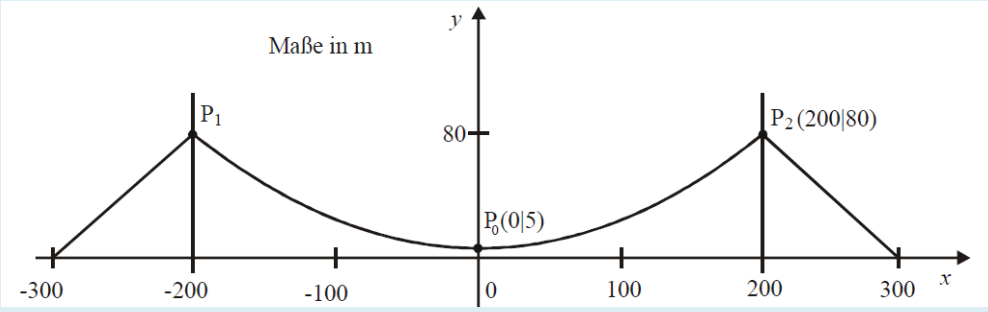
8.6.5 Schülerlösungen bei anderen Explikationsaufgaben

Zwei andere Aufgaben sind dem Typus der Explikationsaufgabe zuzuordnen und sprechen damit die prozessbezogene Kompetenz des Argumentierens/Kommunizierens an.

Beide Aufgaben sind sowohl im MSA-Gy-Test wie im MSA-Test gestellt. Wir betrachten aber hier – in Relation zur „Korbwurf"-Aufgabe – nur die Lösungen der Gymnasiasten. Die erste Aufgabe ist:

MSA-Gy-4a - „Stahlseil der Hängebrücke"

Der Verlauf des Stahlseils zwischen den Brückenpfeilern kann annähernd durch eine Parabel beschrieben werden.



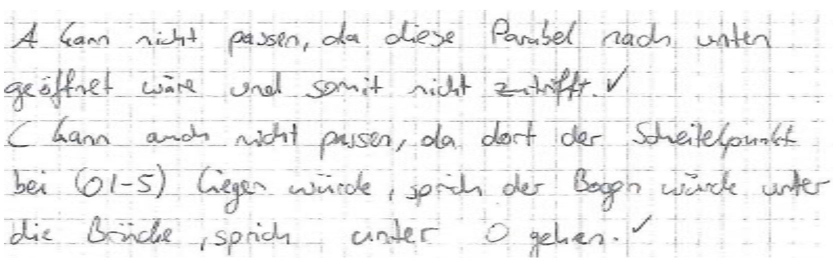
a) Eine der folgenden Funktionsgleichungen gehört zu der Parabel, die den Verlauf des Stahlseils beschreibt.

A	B	C
$y = -0{,}001875 \cdot x^2 + 5$	$y = 0{,}001875 \cdot x^2 + 5$	$y = 0{,}001875 \cdot x^2 - 5$

a1) Notiere den zugehörigen Lösungsbuchstaben in deinen Unterlagen.

a2) Erkläre, warum die beiden anderen Funktionsgleichungen die Parabel nicht beschreiben.

Die verlangte Explikation in MSA-Gy-4a2 wird hier mit der Anweisung „Erkläre!" ausgedrückt. Für die Schülerinnen und Schüler scheint das im Kontext der gesamten Teilaufgabe MSA-Gy-4a leicht verständlich, denn nur 12,5% der Schülerinnen und Schüler erzielen nur 0 oder 1 Punkt in der Bewertung, die anderen 87,5 % erhalten die volle Punktzahl[59]. Dies ist ein außerordentlich deutlicher Unterschied zur „Korbwurf"-Aufgabe mit einer Lösungshäufigkeit von unter 10%. In der überwiegenden Zahl assoziieren die Schülerinnen und Schüler zur Anweisung „Erkläre" auch, dass irgendeine Art von Begründung hinzugefügt werden soll. Für diese gibt es aber zwei Möglichkeiten: Man kann ohne weiteren Kommentar Faktenwissen über die Formen von Parabeln abrufen, man kann aber auch auf die Gründe abheben, weshalb bestimmte Größen der Parameter bestimmte Formen nach sich ziehen. Die folgende Schülerlösung hält sich bei der Funktionsgleichung A an die erste Variante, bei der Funktionsgleichung C an die zweite:


A kann nicht passen, da diese Parabel nach unten geöffnet wäre und somit nicht zutrifft. ✓
C kann auch nicht passen, da dort der Scheitelpunkt bei (0|-5) liegen würde, sprich der Bogen würde unter die Brücke, sprich unter 0 gehen. ✓

Gymnasium – „sehr gut"

Noch argumentativer ist diese Schülerlösung:

[59] Lösungsquote im „Modul 2"-Datensatz 77,1 % (Gymnasium).

A beschreibt die Funktionsgleichung der Parabel nicht richtig, weil dort „– 0,001875 · x² + 5" steht und dass heißt, das sie nach unten geöffnet wäre, die trifft bei Brücken nie auf. Die Parabel C trifft nicht ein, da sie 5 m nach unten verschoben ist „0,001875 · x² – 5", dass heißt, sie würden unter der eigentlichen Brücke hängen

Gymnasium – „befriedigend"

Insgesamt erkennt man in den Schülerbearbeitungen weitaus mehr argumentierende Ansätze, als etwa in der „Korbwurf"-Aufgabe, wie die Tabelle zeigt.

Tabelle 8- 20. Arten der Erklärungen für die Funktionsgleichungen - MSA-Gy-4a2 – „Stahlseil der Hängebrücke":

Erklärungen	**Antwort nur mit Faktenabruf**	**Antwort mit Begründungsansätzen**	**fehlerhafte oder fehlende Antworten**
zur Funktionsgleichung A	21	40	16
in %	27,3	51,9	20,8
zur Funktionsgleichung B	28	31	18
in %	36,4	40,3	23,4

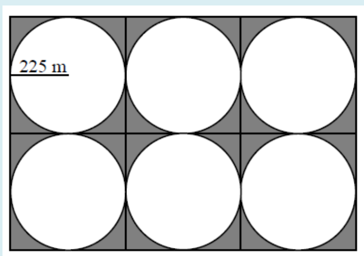
(Auswahl: je eine „starke", „mittlere", schwache" Arbeit pro Klasse)

Die zweite Aufgabe mit Explikationscharakter ist MSA-Gy-2b, in der die Berechnung der Größe der bewässerten Fläche in einem rechteckigen Getreidefeld beschrieben werden soll. Die Anweisung lautet ähnlich wie bei der „Korbwurf"-Aufgabe „Beschreibe einen möglichen Lösungsweg, ohne zu rechnen!". Auch diese Aufgabe fällt den Schülerinnen und Schülern leicht mit ca. 2/3 Lösungshäufigkeit (Tab. 2-27).

MSA-Gy-2b - „Bewässerte Fläche"

Aus dem Flugzeug sieht Jacksons Getreidefeld aus wie auf der Skizze rechts: Die bewässerten Kreisflächen sehen grün (hier: weiß) aus, das andere Gelände ist braun (hier: grau).

b) Die Fläche, die nicht bewässert wird, soll berechnet werden.
Beschreibe einen möglichen Lösungsweg, ohne zu rechnen.



Die Schülerinnen und Schüler assoziieren bei der gegebenen Anweisung, dass keine allzu detaillierten Angaben verlangt werden, sondern ein eher beschreibendes Vorgehen. So tut es auch die Auswertungsanweisung für die Lehrerinnen und Lehrer, indem als Beispiel angegeben wird: „Die nicht bewässerte Fläche besteht aus 6 Quadratflächen, von denen die 6 Kreisflächen abgezogen werden." Auch die Kriterien geben nun nicht mehr einzelne

Schritte in einem rechnerischen Lösungsgang an, sondern fordern insgesamt, dass die Schülerinnen und Schüler „einen Lösungsweg in sprachlicher oder formalisierter Form" beschreiben sollen.[60]

Es interessiert abschließend, wie genau das den Lehrerinnen und Lehrern als Orientierung gegebene Beispiel die Schülerlösungen trifft. Man erkennt allerdings, dass die Musterlösung nur von 10 Schülerinnen und Schülern genutzt wird (Tab. 8-21). Eine Vorerprobung wenigstens ähnlicher Aufgaben wäre daher nützlich gewesen.

Tabelle 8 – 21. Vorgehen der Schülerinnen und Schüler bei der Beschreibung der Flächenberechnung - MSA-Gy-2b – „Bewässerte Fläche".

beschriebene Lösungsansätze	**Anzahl**	**%**
Vom Flächeninhalt des Rechtecks – *ohne* Angabe, wie die Rechteckfläche berechnet wird – die sechsfache Kreisfläche subtrahieren.	11	14,3%
Vom Flächeninhalt des Rechtecks – *mit* Angabe, wie die Rechteckfläche berechnet wird – die sechsfache Kreisfläche subtrahieren	24	31,2%
von einer Quadratfläche wird eine Kreisfläche subtrahiert, danach mit 6 multipliziert	17	22,1%
vorgegebene *Musterlösung*: Von 6 Quadratflächen werden 6 Kreisflächen subtrahiert	10	13,0%
Fehler: Von einer Quadratfläche wird eine Kreisfläche subtrahiert, Multiplikation mit 6 fehlt	9	11,7%
Lösungsvariante nicht zuzuordnen oder andere falsche Strategie	6	7,8%
gesamt (Auswahl: je eine „starke", „mittlere", schwache" Arbeit pro Klasse)	**77**	**100,0%**

[60] Allerdings wirkt sich die unterschiedliche Präzisierung der Auswertungsanleitung in der MSA-Prüfung und der MSA-Gy-Prüfung auf das Bewertungsverhalten der Lehrerinnen und Lehrer aus. In MSA wird verlangt, für das Quadrat zusätzlich die „Kantenlänge 450 m" numerisch anzugeben, in MSA-Gy kommt diese Maßbestimmung nicht vor. Entsprechend wird der Punkt in der MSA-Prüfung nicht vergeben wenn die Maßzahl fehlt.

8.6.6 Konsequenzen für die Konstruktion von Aufgaben zu den prozessbezogenen Kompetenzen Argumentieren und Kommunizieren

Argumentieren und Kommunizieren innerhalb des hier besprochenen Typus Explikationsaufgabe sollten nach den vorstehenden Analysen der „Korbwurf"-Aufgabe und der beiden verwandten Aufgaben aus der ZP-10 bereits in der Fragestellung der Aufgabe deutlich genug zum Ausdruck kommen. Orientierungsmarken hierfür können die zwei unterschiedlichen mathematischen Tätigkeiten sein, die mit Aufgaben zum Argumentieren und Kommunizieren zu verbinden sind: Man kann einerseits in einer solchen Aufgabe die detaillierte Beschreibung eines (prozeduralen) Lösungsweges verlangen, und zwar mit Betonung auf einer präzisen Beschreibung der Abfolge von Schritten, die zur Lösung eines Problems beitragen. Man kann die Kompetenz des Argumentierens und Kommunizierens andererseits auch so verstehen, dass es um die Darstellung der (mathematischen, logischen, modellbezogenen) Voraussetzungen und Gründe für die einzelnen anzuwendenden Verfahren geht.

Für die Konstruktion solcher Aufgaben haben sich in den hier vorgenommenen Analysen drei wesentliche Bedingungen herauskristallisiert.

(1) Im Aufgabentext sind die *Ebenen der erwarteten Beschreibungen* oder Erklärungen explizit auszuweisen. Es sollte gesagt werden, ob man einen Lösungsansatz in algebraischer oder formaler Notation wünscht oder ob eine sprachliche Darstellung genügt oder sogar vorzuziehen ist. Die Anweisungen an die Schülerinnen und Schüler sind darauf kritisch zu prüfen.

In den Analysen der „Korbwurf"-Aufgabe zeigte sich hier, dass es nicht immer klar war, ob die mathematische Form einer Funktionsgleichung erwartet wird und zu honorieren ist.

(2) Der *Grad an Explizitheit*, der erwartet wird, ist deutlich zu machen. Das kann z.B. mit Hinweisen wie „führe geeignete Variablen ein" oder „schreibe die entsprechenden Gleichungen an" ausgedrückt werden.

Die Analysen wiesen bei der „Korbwurf"-Aufgabe ein breites Spektrum von Schülerlösungen aus, die von vagen Beschreibungen bis zu detaillierten Lösungsgängen mit einzelnen Gleichungen reichten.

(3) Es ist ausdrücklich zu bedenken und in die Aufgabentexte umzusetzen, ob in der Aufgabe mehr Wert auf die *kommunikative* Form des Beschreibens gelegt werden soll oder mehr die *Argumentation* in den Vordergrund gerückt werden muss. Im Konkreten kann ein solcher Akzent durch Präzisierung der Fragen in bestimmte Richtungen gesetzt werden, etwa durch „Reichen die vorgegebenen Daten aus?"

Bei der „Korbwurf"-Aufgabe war hierin bereits Unklarheit in den Auswertungsanleitungen zu erkennen. Begründungen wurden andeutungsweise im Beispieltext, nicht mehr aber in den Kriterien erwähnt.

Die genannten Bedingungen sind freilich dem jeweiligen Aufgabenkontext anzupassen. Sie sind grundsätzliche Orientierungen für die Aufgabenkonstruktion. Es kommt ihnen aber solange eine erhebliche mathematikdidaktische Bedeutung zu, als die prozessbezogenen Kompetenzen des Argumentierens und Kommunizierens nicht schärfer unterschieden werden. Sie können daher auch Anhaltspunkte für die Entwicklung des Mathematikunterrichts sein, den Schülerinnen und Schülern diese Kompetenzen deutlicher zu machen.

Resümee

9 Resümee

Die hier vorgelegten Analysen der zentralen Prüfungen 2008 für die Klassen 10 in den Schulen in Nordrhein-Westfalen gehen einen bisher bei der Evaluation von Prüfungen wenig beschrittenen Weg. Sie konzentrieren sich unmittelbar auf inhaltliche Aspekte – *fachliche* und *prozessorientierte Aspekte* gleichermaßen. Daher sind es zwei übergreifende Gesichtspunkte, die die Analysen der zentralen Prüfungen ZP-10-2008 in Nordrhein-Westfalen leiten: Der Bestand der gestellten Aufgaben wird nach mathematikdidaktischen Kriterien untersucht, und die durch die Schülerinnen und Schüler bearbeiteten Aufgaben werden mit Blick auf die mathematischen und kognitiven Leistungen beobachtet. Diese Analysen erbrachten folgende wesentliche Ergebnisse:

Aufgabenstellung

Die gestellten Aufgaben fußen auf den Kernlehrplänen von Nordrhein-Westfalen und auf den prüfungsspezifischen Vorgaben aus dem Ministerium für Schule und Weiterbildung. Der Aufgabenbestand realisiert dabei die selbst gestellten Vorgaben hinreichend breit und auch die Formate – beides: im Sinn der Formulierungen und im Sinn des Problemlösecharakters – sind hinreichend variationsreich. Bei solchen Urteilen ist natürlich auch die zeitliche Limitierung einer zentralen Prüfung zu berücksichtigen. Weniger Variationsbreite ergibt die Analyse der ZP-10 nach übergreifenden Gesichtspunkten in den bundesweiten Bildungsstandards. Mit lediglich zwei Aufgaben in der Prüfungsvariante MSA-Gy wird der Anforderungsbereich III erreicht.

Zudem stellen die Kernlehrpläne wichtige Kompetenzen nicht so differenziert dar, wie die Bildungsstandards. Das betrifft insbesondere die prozessbezogene Kompetenz Argumentieren/Kommunizieren, die die Bildungsstandards in zwei Kompetenzen aufteilen, aber auch das Aufgehen der Kompetenz Darstellen in anderen Kompetenzen und das völlige Fehlen der in den Bildungsstandards eigens ausgewiesenen Kompetenz „Mit Mathematik symbolisch / formal / technisch umgehen". Diese Inkongruenz innerhalb der eigenen Vorgaben in Nordrhein-Westfalen und zu den Bildungsstandards in Deutschland beeinflusst die Aufgabenstellung an mehreren Stellen. Die Prüfungsvorgaben präsentieren sich darüber hinaus in Form der „Kompetenzmatrix", die prozessbezogene Kompetenzen stets an bestimmte Inhalte koppelt, was zu weiteren Einengungen führt.

Bei den Inhalten ist insbesondere zu konstatieren, dass der für die Mathematik zentrale Begriff der Funktion nur eingeschränkt auftritt, indem die für den Übergang zur gymnasialen Oberstufe entscheidende Kovariationsvorstellung ausgeblendet bleibt, und dass geometrische Aktivitäten oft auf Berechnungsaufgaben reduziert sind. Der Erfassung grundlegender algebraischer Fertigkeiten ist kaum Raum gegeben, denn selbst wenn man anerkennt, dass rein formales algebraisches Arbeiten nach den Intentionen der Kernlehrpläne möglichst nur in Modellierungszusammenhängen auftreten soll, so sind doch die dort vorkommenden Gleichungen und Funktionen wenig herausfordernd.

Diese erkannten Beschränkungen fußen allerdings auf tiefer liegenden Grundproblemen, die sich bereits in den Intentionen der ZP-10 abzeichnen. Es ist sowohl in den Kernlehrplänen von Nordrhein-Westfalen wie auch in den Prüfungs-Vorgaben aus dem Ministerium zur ZP-10 nicht deutlich genug ausdifferenziert, inwieweit die Gesichtspunkte von „mathematical literacy" gegenüber einer curricular definierten schulmathematischen Systematik auszubalancieren sind. Für zentrale Prüfungen mit dem Charakter von „high stakes"-Abschlussprüfungen kann nicht ungebrochen ein „literacy"-Konzept übernommen werden, wenn gleichzeitig die „Verpflichtung zur Beachtung der gesamten Obligatorik des Kernlehrplans" (siehe Ministeriums-Vorgaben zur ZP-10) eingelöst werden soll.

Als ein Kernproblem der Aufgabenstellung erweist sich schließlich auch, wie die Verteilung der Schulformen auf die drei Varianten der Prüfung gestaltet wurde. Es zeigte sich an mehreren Kriterien außerordentlich deutlich, dass die Zuordnung der Hauptschule/Typ B zur Prüfungsvariante MSA (zusammen mit Gesamtschule/Erweiterungskurs, und in Aufgabenteil 1 sowie in vielen weiteren Aufgaben sogar mit dem Gymnasium) zu Lasten der Schülerinnen und Schüler aus den Hauptschulen geht (und tendenziell Deckeneffekte bei den Gymnasiasten auslöst). Die Leistungen der Schülerinnen und Schüler im Typ B der Hauptschule können so nicht angemessen zur Geltung kommen, insbesondere wenn man die praktischen Konsequenzen beim Übergang in das Berufsleben heranzieht.

Aufgabenbearbeitung

Auf zwei Ebenen machen die Analysen der ausgewählten exemplarischen Schülerlösungen auf Probleme aufmerksam:

Zunächst ist überraschend, wie oft von den Schülerinnen und Schülern Lösungswege beschritten wurden, die in den Auswertungsanleitungen des Ministeriums nicht auftreten. Selbstverständlich können diese Anleitungen immer nur exemplarisch sein und von den Lehrerinnen und Lehrer auch nur exemplarisch gelesen werden. Den Lösungsvarianten der Mehrzahl der Schülerinnen und Schüler sollte aber dennoch mehr Aufmerksamkeit geschenkt werden. Eine Art Vorerprobung ist daher zu bedenken. Insbesondere ist, wenn realitätsorientierte Aufgaben einen so großen Raum einnehmen, in einer Form von Pilotierung das für eine Aufgabe erforderliche außermathematische Sachwissen der Schülerinnen und Schüler zu eruieren.

Bei den Aufgabenbearbeitungen der Schülerinnen und Schüler fällt auf, wie wenig flexibel mit den symbolisch/formalen Elementen der Mathematik umgegangen wird. Als „mathematische Werkzeuge zum Erfassen von Phänomenen der realen Welt“ stehen diese zwar durchaus im Zentrum der Kompetenzanforderungen der Kernlehrpläne in Nordrhein-Westfalen. Aber die Schülerinnen und Schüler zeigen selbst bei auf der Hand liegenden, möglicherweise durch die Konstruktion der Prüfungsaufgaben sogar provozierten, Vereinfachungsmöglichkeiten in der großen Mehrheit ein schematisches Verhalten. Das scheint auf Defizite im Mathematikunterricht zu deuten, in dem offenbar auf reflektierendes und dann adaptives Verhalten beim Umgang mit mathematischen Verfahren und Begriffen zu wenig Wert gelegt wird.

Im Bereich der prozessbezogenen Kompetenzen wird eine Realisierung der Kompetenz Argumentieren/Kommunizieren durch die Beschreibungsaufgaben angestrebt. Die genannten Inkongruenzen zwischen den nordrhein-westfälischen Kernlehrplänen und den Bildungsstandards bilden sich nun in den Schülerbearbeitungen ab als Unsicherheit der Schülerinnen und Schüler, welche Antwortebene angemessen sei. Die Schülerinnen und Schüler neigen eher dem Kommunizieren zu, denn einem argumentierenden Vorgehen, wiederum ein Hinweis, auf Ausbildung einer argumentativen Grundhaltung im Mathematikunterricht mehr zu achten.

Schülerinnen und Schüler zeigen darüber hinaus an mehreren Stellen „kreative“, aber unerwünschte Lösungsvarianten. Bei einigen Aufgaben scheint für sie der außermathematische Kontext zu sehr zu dominieren, so dass Unklarheit entsteht, ob schon eine intelligente sachgerechte Schätzung oder allein eine exakte Rechnung als Lösung akzeptabel sei. Die Auswertungsanleitungen gehen auf dieses Grundproblem i.d.R. nicht ein. Auch diese Beobachtung scheint auf den Mathematikunterricht zurückzuweisen, in dem offenbar die fundamental verschiedenen Rollen, die die Mathematik im Kontext und als Domäne eigenen Rechts spielt, nicht klar genug thematisiert werden. Dies wäre aber gerade eine der Funktionen eines allgemeinbildenden Mathematikunterrichts.

Schlussfolgerungen

Die Schlussfolgerungen, die man aus den vorliegenden Analysen ziehen kann, sollen sich nach den Intentionen des Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen auf drei Bereiche beziehen: Reflexion und Optimierung der Aufgabenkonstruktion, Impulse zur Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts und Anregungen, wie Ergänzungsangebote gestaltet werden können für den Übergang in die gymnasiale Oberstufe. Zu allen drei Bereichen sagen unsere Analysen etwas aus:

Für die Aufgabenkonstruktion ergibt sich vor allem aus dem dargestellten System der Aufgabenmerkmale eine fachliche Grundlage, die das Potential für Aufgabengestaltungen theoretisch umreißt und strukturiert. Die jeweils detaillierten Kategorien zu den Merkmalen und die zahlreich diskutierten Aufgabenbeispiele machen das Klassifikationssystem plastisch und konkret. Übergeordnet kann man sich an der Herstellung von mathematischer Kohärenz in den Aufgabengruppen orientieren. Die diskutierten mathematikdidaktischen Rahmenbedingungen zeigen zugleich auf das Kernproblem: Entscheidend ist es, eine Balance zu finden zwischen „literacy“-orientierten Aufgaben und Aufgaben, die auf den systematischen Wissensaufbau – als Vorbedingung und Ziel von „literacy“ - abzielen und diesen sichern können. Im Augenblick scheint uns der Schwerpunkt des Aufgabenbestands der ZP-10 eher auf der „literacy“-Seite zu liegen als sich an Erfordernissen des systematischen Aufbaus intelligenten Wissens (im Sinn von Weinert) zu orientieren.

Diese Balance ist auch entscheidend für die Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts. Die vorliegenden Analysen geben hier insofern Impulse, als sie durch detaillierte Interpretationen konkreter Schülerlösungen unter der Generalperspektive Aufbau intelligenten, vernetzten und umsetzbaren Wissens und Könnens auf die Problemzonen des Fachunterrichts hinweisen: Vorherrschen schematischen Denkens, wenig reflektierendes Verhalten, Unsicherheiten in der technischen Performanz. Verkürzungen im Aufgabenbestand, etwa die zu wenigen geometrischen Aspekte in den Aufgaben oder das zu geringe Betonen der Kompetenz zum mathematischen Argumentieren, könnten durch entsprechende Schwerpunktsetzungen im Mathematikunterricht aufgefangen werden. Die Stochastik scheint uns dem Aufgabensatz nach im Mathematikunterricht inzwischen recht gut verankert zu sein.

Für Schülerinnen und Schüler am Übergang zur gymnasialen Oberstufe ist ein hinreichend breites Grundwissen ebenso erforderlich wie ausgebildete prozessbezogene Kompetenzen. Vorbereitend auf die gymnasiale Oberstufe sind aber jedenfalls – und dazu hat die Analyse der ZP-10 am ehesten Handlungsbedarf angezeigt – ausreichend breite Grundvorstellungen zu zentralen Begriffen der Mathematik, argumentatives Denken und die Einbettung der Einzelkenntnisse in einen systematisch geordneten Wissensbestand. Diese übergreifenden Gesichtspunkte werden nicht einfach durch Ergänzungsangebote aufgefangen werden können; sie müssen Teil des gesamten Mathematikunterrichts sein. Solche systematischen Voraussetzungen harmonieren aber gleichwohl sehr gut mit einem letztlich auf das Ziel „mathematical literacy“ verpflichteten Mathematikunterricht.

Literatur, Quellen,
Verzeichnis der Tabellen und Abbildungen

Literatur

Baptist, P. & Winter, H. (2001). Überlegungen zur Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts in der Oberstufe des Gymnasiums. In H.-E- Tenorth, *Kerncurriculum Oberstufe* (S. 54 - 76). Weinheim: Beltz.

Bassok, M. & Holyoak, K.J. (1989). Interdomain transfer between isomorphic topics in algebra and physics. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition 15*, 153 - 166.

Bauer, L. (1978). *Mathematische Fähigkeiten. Mathematische Fähigkeiten in der Sekundarstufe II und ihre Bedeutung für das Lösen von Abituraufgaben*. Paderborn: Schöningh.

Baumert, J., Lehmann, R., Lehrke, M., Schmitz, B., Clausen, M., Hosenfeld, I., Köller, O. & Neubrand, J. (1997). *TIMSS - Mathematisch - naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich: Deskriptive Befunde.* Opladen: Leske & Budrich.

Baumert, J. Kunter, M., Brunner, M., Krauss, S., Blum, W. & Neubrand, M. (2004). Mathematikunterricht aus Sicht der PISA-Schülerinnen und -Schüler und ihrer Lehrkräfte. In M. Prenzel & al. (Hrsg.), *PISA 2003: Der Bildungsstand der Jugendlichen in Deutschland: Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs* (S. 314 - 354). Münster: Waxmann.

Baumert, J., Klieme, E., Neubrand, M., Prenzel, M., Schiefele, U., Schneider, W., Stanat, P., Tillmann, K.-J. & Weiß, M. (Hrsg.) (2001). *PISA 2000 - Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich*. Opladen: Leske & Budrich.

Baumert, J. & Kunter, M. (2006). Stichwort: Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 9 (4)*, 469-520.

BLK (Hrsg.). (1997). *Gutachten zur Vorbereitung des Programms „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts“* (Materialien zur Bildungsplanung und Forschungsförderung, Heft 60). Bonn: Bund-Länder-Kommission für Bildungsplanung und Forschungsförderung.

Blum, W. (1996). Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht - Trends und Perspektiven. In G. Kadunz & al. (Hrsg.), *Trends und Perspektiven - Beiträge zum 7. Internationalen Symposium zur Didaktik der Mathematik in Klagenfurt Sept.1994* (S. 15 - 38). Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.

Blum, W., Drüke-Noe, Ch., Hartung, R. & Köller, O. (Hrsg.) (2006). *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen*. Berlin: Cornelsen.

Bohl, Th. & Kiper, H. (Hrsg.) (2009). *Lernen aus Evaluationsergebnissen – Verbesserungen planen und implementieren* (S. 97 - 112). Bad Heilbrunn: Julius Klinkhardt.

Borneleit, P., Danckwerts, R., Henn, H.-W. & Weigand, H.-G. (2001). Expertise zum Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe. In: *Journal für Mathematik-Didaktik 22 (1)*, 73-90.

Breidenbach, W. (1969). *Methodik des Mathematikunterrichts in Grund- und Hauptschulen.* Hannover: Schroedel.

Bromme, R., Seeger, F & Steinbring, H. (1990). *Aufgaben als Anforderungen an Lehrer und Schüler* (= IDM-Untersuchungen zum Mathematikunterricht, Bd. 14). Köln: Aulis.

Bruder, R. (1988). *Grundfragen mathematikmethodischer Theoriebildung unter besonderer Berücksichtigung des Arbeitens mit Aufgaben*. Diss.B (Habilitationsschrift), PH Postdam.

Bruder, R. (2000). Akzentuierte Aufgaben und heuristische Erfahrungen – Wege zu einem anspruchsvollen Mathematikunterricht für alle. In L. Flade & W. Herget, *Lehren und Lernen nach TIMSS: Anregungen für die Sekundarstufen*(S. 69-78). Berlin: Volk und Wissen.

Bruder, R. (2008). Wider das Vergessen: Fit bleiben durch vermischte Kopfübungen. *mathematik lehren 147*, 12-14.

Bruder, R. Leuders, T. & Büchter, A. (2008). *Mathematikunterricht entwickeln. Bausteine für kompetenzorientiertes Unterrichten*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Brunner, E., Pauli, Ch. & Reusser, K. (2010). Understanding-Oriented Mathematics Instruction using the Example of Solving a Word Problem. *Journal für Mathematik-Didaktik 31 (1)*, 31 - 50.

Büchter, A. & Leuders, T. (2005). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistung überprüfen*. Berlin: Cornelsen Scriptor

Büchter, A. & Henn, H.-W. (2007). *Elementare Stochastik: Eine Einführung in die Mathematik der Daten und des Zufalls.* Berlin Heidelberg New York: Springer.

Büchter, A. & Henn H.-W. (2009). *Elementare Analysis. Von der Anschauung zu Theorie.* Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Büchter, A. & Pallack, A. (2009). *Prüfungen setzen Standards! Empirische Analysen zentraler Prüfungen am Ende der Sekundarstufe I.* Internes Diskussionspapier Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen, Arbeitsgruppe Qualitätssicherung (Soest).

Cohors-Fresenborg, E. (1996). Mathematik als Werkzeug zur Wissensrepräsentation. In G. Kadunz, H. Kautschitsch, G. Ossimitz, & E. Schneider (Hrsg.), *Trends und Perspektiven (= Schriftenreihe Didaktik der Mathematik 23)* (S. 85–90). Wien: Hölder-Pichler-Tempsky

Cohors-Fresenborg, E., (2001): Mathematik als Werkzeug zur Wissensrepräsentation: Das Osnabrücker Curriculum. *Der Mathematikunterricht 47(1)*, 5–13.

de Lange, J. (1987). *Mathematics, insight and meaning.* Utrecht: Institut OW&OC.

Dörner, D. (1979). *Problemlösen als Informationsverarbeitung*. Stuttgart: Kohlhammer.

Eichler, A. & Vogel, M. (2009). *Leitidee Daten und Zufall. Von konkreten Beispielen zur Didaktik der Stochastik*. Wiesbaden: Vieweg & Teubner.

Franke, M. (2003). *Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule.* Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.

Freudenthal, H. (1977). *Mathematik als pädagogische Aufgabe* (Bd. 1 und 2). Stuttgart: Klett.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Kluwer.

Haftendorn, D. (2010). *Mathematik sehen und verstehen: Schlüssel zur Welt*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Hardy, I., Jonen, A., Möller, K. & Stern, E. (2006). Effects of instructional support within constructivist environments for elementary school students' understanding of „floating and sinking". *Journal of Educational Psychology, 98*, 307-326.

Heymann, H. W. (1996). *Allgemeinbildung und Mathematik*. Weinheim: Beltz.

Hiebert, J. (Ed.). (1986). *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Hiebert, J. & Carpenter, Th. (1992). Learning and teaching with understanding. In D.A Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 65-100). New York: Macmillan Publishing Company.

ISB (Hrsg.) (2009). *Jahrgangsstufenarbeit Mathematik für die Jahrgangsstufe 6 an den bayerischen Hauptschulen (01. Oktober 2009)*. München: ISB (Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung). - download unter http://www.isb.bayern.de/isb/ bei „Vergleichsarbeiten"; zuletzt geprüft: 2.03.2010)

Jordan, A., Krauss, S., Löwen, K., Blum, W., Neubrand, M. Brunner, M., Kunter, M. & Baumert, J. (2008). Aufgaben im COACTIV-Projekt: Zeugnisse des kognitiven Aktivierungspotentials im deutschen Mathematikunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik 29 (2),* 83 - 107.

Kleine, M. & Jordan, A. (2007): Lösungsstrategien von Schülerinnen und Schülern in Proportionalität und Prozentrechnung – eine korrespondenzanalytische Betrachtung. *Journal für Mathematikdidaktik 28 (3/4)*, 209 – 223.

Klieme, E., Neubrand, M., & Lüdtke, O. (2001). Mathematische Grundbildung: Testkonzeption und Ergebnisse. In J. Baumert & al. (Hrsg.), *PISA 2000. Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich* (S. 139–190). Opladen: Leske + Budrich.

Klieme, E., Avenarius, H., Blum, W., Döbrich, P., Gruber, H., Prenzel, M., Reiss, K., Riquarts, K., Rost, J., Tenorth, H.-E. & Vollmer, H. J. (Hrsg.) (2003). *Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards. Eine Expertise*. Bonn: BMBF.

Krummheuer, G. (2003). Argumentationsanalyse in der mathematikdidaktischen Unterrichtsforschung. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 35(6)*, 247-256.

Kütting, H. (1994). *Didaktik der Stochastik* (= Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik, Bd. 23).Mannheim: Bibliographisches Institut.

Kultusministerkonferenz - KMK (Hrsg.) (1995). Weiterentwicklung der Prinzipien der gymnasialen Oberstufe und des Abiturs: Abschlussbericht der von der Kultusministerkonferenz eingesetzten Expertenkommission. Bonn: KMK.

Kultusministerkonferenz – KMK (Hrsg.) (2003). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. Neuwied: Wolters-Kluwer & Luchterhand.

Kultusministerkonferenz – KMK (Hrsg.).(2004). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss. Neuwied: Wolters-Kluwer & Luchterhand.

Leiß, D., Schukajlow, S., Blum, W., Messner, R. & Pekrun, R. (2010). The Role of the Situation Model in Mathematical Modelling - Task Analyses, Student Competencies, and Teacher Interventions. *Journal für Mathematik-Didaktik 31 (1)*, 119 - 141.

Lenné, H. (1969). *Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland*. Klett Stuttgart.

Leuders, T. & Leiß, D. (2006). Realitätsbezüge. In W. Blum & al. (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen* (S. 194 - 206). Berlin: Cornelsen.

Maier, H. & Schubert, A. (1978). *Sachrechnen*. München: Ehrenwirth.

Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Braunschweig: Vieweg.

Martina Humbach (2008). *Arithmetische Basiskompetenzen in der Klasse 10. Quantitative und qualitative Analysen.* Berlin. Verlag Dr. Köster.

Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen – MSW (Hrsg.) (2007). Lernstandserhebungen Mathematik in Nordrhein-Westfalen. Impulse zum Umgang mit zentralen Tests. Stuttgart, Leipzig: Ernst Klett Schulbuchverlag.

Ministerium für Schule, Jugend und Kinder des Landes Nordrhein-Westfalen (Hrsg.) (2004). *Kernlehrplan für die Gesamtschule – Sekundarstufe I in Nord¬rhein-West¬falen* (Heft 3106n). Frechen: Ritterbach-Verlag.

Ministerium für Schule, Jugend und Kinder des Landes Nordrhein-Westfalen (Hrsg.) (2004). *Kernlehrplan für die Hauptschule in Nord¬rhein-West¬falen* (Heft 3203). Frechen: Ritterbach-Verlag.

Ministerium für Schule, Jugend und Kinder des Landes Nordrhein-Westfalen (Hrsg.) (2004). *Kernlehrplan für die Realschule in Nord¬rhein-West¬falen* (Heft 3302). Frechen: Ritterbach-Verlag.

Ministerium für Schule, Jugend und Kinder des Landes Nordrhein-Westfalen (Hrsg.) (2004). *Kernlehrplan für das Gymnasium – Sekundarstufe I in Nord¬rhein-West¬falen* (Heft 3402). Frechen: Ritterbach-Verlag.

Neubrand, J. (2002). *Eine Klassifikation mathematischer Aufgaben zur Analyse von Unterrichtssituationen - Selbsttätiges Arbeiten in Schülerarbeitsphasen in den Stunden der TIMSS-Video-Studie*. Hildesheim: Franzbecker.

Neubrand, J. (2006). The TIMSS 1995 and 1999 Video Studies. In F. Leung, K. Graf & F. Lopez-Real (Eds.), *Mathematics Education in Different Cultural Traditions: A Comparative Study of East Asia and the West. – The 13th ICMI Study* (pp 291-318). Berlin, Heidelberg, New York: Springer.

Neubrand, J. (2009). Geschichte der Bildungsstandards Mathematik in Deutschland: Quellen und Begriffe. In S. Thom & B. Lutz-Westphal (Hrsg.), *Impulse für das Lehren und Lernen von Mathematik - Festschrift für Prof. Dr. Martin Winter* (= Vechtaer fachdidaktische Forschungen und Berichte, 18) (S. 55-70). Vechta: IfD / Hochschule Vechta.

Neubrand, J., Neubrand, M. & Sibberns, H. (1998). Die TIMSS-Aufgaben aus mathematikdidaktischer Sicht: Stärken und Defizite deutscher Schülerinnen und Schüler. In W. Blum & M. Neubrand (Hrsg.), *TIMSS und der Mathematikunterricht. Informationen, Analysen, Konsequenzen* (S. 17–27). Hannover: Schroedel.

Neubrand J. & Neubrand, M. (1999). Effekte multipler Lösungsmöglichkeiten: Beispiele aus einer japanischen Mathematikstunde. In C. Selter & G. Walther (Hrsg.), *Mathematikdidaktik als design science - Festschrift für Erich Christian Wittmann* (S. 148 - 158). Leipzig, Stuttgart, Düsseldorf: Ernst Klett Grundschulverlag

Neubrand, M. (2000). Reflecting as a Didaktik construction: Speaking about mathematics in the mathematics classroom. In I. Westbury, S. Hopmann, & K. Riquarts (Eds.), *Teaching as a reflective practice: The German Didaktik tradition* (pp. 251–265). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Neubrand, M. (2003). „Mathematical literacy" / „Mathematische Grundbildung": Der Weg in die Leistungstests, die mathematikdidaktische Bedeutung, die Rolle als Interpretationshintergrund für den PISA-Test. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft 6(3)*, 338 - 356.

Neubrand, M. (2009). Mathematische Bildung in der Sekundarstufe: Orientierungen für die inhaltliche Ausgestaltung von Übergängen. In A. Heinze & M. Grüßing (Hrsg.), *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium: Kontinuität und Kohärenz als Herausforderung für den Mathematikunterricht* (S. 181 - 190). Münster: Waxmann.

Neubrand, M. (Hrsg.) (2004). *Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland: Vertiefende Analysen im Rahmen von PISA-2000* (S. 15 - 29). Wiesbaden: VS - Verlag für Sozialwissenschaften.

Neubrand, M., Biehler, R., Blum, W., Cohors-Fresenborg, E., Flade, L., Knoche, N., Lind, D., Löding, W., Möller, G., & Wynands, A. (Deutsche PISA-2000-Expertengruppe Mathematik) (2001). Grundlagen der Ergänzung des internationalen PISA-Mathematik-Tests in der deutschen Zusatzerhebung. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 33 (2),* 45–59.

Neubrand, M., Klieme, E., Lüdtke, O., & Neubrand, J. (2002). Kompetenzstufen und Schwierigkeitsmodelle für den PISA-Test zur mathematischen Grundbildung. *Unterrichtswissenschaft*, *30 (2),* 100–119.

OECD - Organisation for Economic Co-operation and Development (1999). *Measuring student knowledge and skills: A new framework for assessment.* Paris: OECD. [In deutscher Sprache: Deutsches PISA-Konsortium (2000). *Schülerleistungen im internationalen Vergleich. Eine neue Rahmenkonzeption für die Erfassung von Wissen und Fähigkeiten.* Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung]

OECD (2001). *Lernen für das Leben: Erste Ergebnisse der internationalen Schulleistungsstudie PISA 2000*. Paris: OECD.

OECD (2003). *The PISA 2003 Assessment Framework: Mathematics, reading, science and problem solving knowledge and skills*. Paris: OECD.

OECD (2004). *Lernen für die Welt von morgen - Erste Ergebnisse von PISA 2003*. Paris: OECD.

Renkl, A. (1991). *Die Bedeutung der Aufgaben- und Rückmeldungsgestaltung für die Leistungsentwicklung im Fach Mathematik*. Dissertation Universität Heidelberg.

Renkl, A. (1996). Träges Wissen: Wenn Erlerntes nicht genutzt wird. *Psychologische Rundschau, 47 (2)*, 78-92.

Reusser, K. (1992). Kognitive Modellierung von Text-, Situations- und mathematischem Verständnis beim Lösen von Textaufgaben. In K. Reiss & M. Reiss (Eds.), Maschinelles Lernen - Modellierung von Lernen mit Maschinen (pp 225 - 249). Berlin: Springer.

Sfard, A. (2003). Balancing the unbalanceable: The NCTM standards in the light oftheories of learning mathematics. In J. Kilpatrick, G. Martin & D. Schifter (Eds.), *A research companion for NCTM standards* (pp. 353 - 392). Reston, VA: NCTM, National Council for Teachers of Mathematics.

Stark-Verlag (Hrsg.) (2009 a). *Zentrale Prüfung 10. Klasse - Mathematik Nordrhein-Westfalen mit Lösungsheft. Zentral gestellte Prüfung am Ende der Klasse 10 an Hauptschulen (Typ A) und Gesamtschulen (Grundkurs) in Nordrhein-Westfalen*. Freising-Hallbergmoos: Stark Verlag.

Stark-Verlag (Hrsg.) (2009 b). *Zentrale Prüfung 10. Klasse - Mathematik Nordrhein-Westfalen mit Lösungsheft. Zentral gestellte Prüfung am Ende der Klasse 10 an Hauptschulen (Typ B) und Gesamtschulen (EK) in Nordrhein-Westfalen*. Freising-Hallbergmoos: Stark Verlag.

Stark-Verlag (Hrsg.) (2009 c). *Zentrale Prüfung 10. Klasse - Mathematik Nordrhein-Westfalen mit Lösungsheft. Zentrale Prüfung am Ende der Klasse 10 an Realschulen und Gesamtschulen EK*. Freising-Hallbergmoos: Stark Verlag.

Stark-Verlag (Hrsg.) (2009 d). *Zentrale Prüfungen Mathematik 10. Klasse Gymnasium Nordrhein-Westfalen*. Freising-Hallbergmoos: Stark Verlag.

Stein, M.K., Grover, B.W. & Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classes. *American Educational Research Journal 33*, 455 - 488.

Steiner, G. (1993). Übung macht den Meister - unter welchen Bedingungen? *Computer und Unterricht 9*, 4 - 9.

Stern, E. (2009). Intelligentes Wissen als der Schlüssel zum Können. In M. Neubrand (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2009. Vorträge auf der 43. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 2.03.2009 bis 6.03.2009 in Oldenburg* (S. 57 - 64). Münster: WTM-Verlag.

Verschaffel, L., Van Dooren, W., Greer, B.& Mukhopadhyay, S. (2010). Reconceptualising Word Problems as Exercises in Mathematical Modelling. *Journal für Mathematik-Didaktik 31 (1)*, 9 -29.

vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg: Spektrum.

Weinert, F.E. (1998). Neue Unterrichtskonzepte zwischen gesellschaftlichen Notwendigkeiten, pädagogischen Visionen und psychologischen Möglichkeiten. In Bayerisches Staatsministerium für Unterricht, Kultus, Wissenschaft und Kunst, *Wissen und Werte für die Welt von morgen. Dokumentation zum Bildungskongress 29./30. April 1998 an der Ludwig-Maximilians-Universität München* (S. 101 – 125). München: Bayer. Kultusministerium.

Winter, H. (1975). Allgemeine Lernziele für den Mathematikunterricht? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 7*, 106–116.

Winter, H. (1985). *Sachrechnen in der Grundschule. Problematik des Sachrechens, Funktionen des Rechnens, Unterrichtsprojekte*. Bielefeld: Cornelsen-Velhagen & Klasing.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 61*, 37–46.

Internetadressen:

Vom Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen definierte Ziele der zentralen Prüfungen:
http://www.standardsicherung.nrw.de/zp10 (download 15.10.2009)

Aufgaben der zentralen Prüfungen im Original:
http://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/zp10/pruefungsaufgaben/ (download 15.10.2009)

Kernlehrpläne und curriculare Vorgaben für die Schulen des Landes Nordrhein-Westfalen:
http://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/lehrplaene (download 15.10.2009)

Tabellen- und Abbildungsverzeichnis

Kap. 1 Rahmenbedingungen, Daten

Kap. 2 Aufgabenbewertungen, Kompetenzprofile

Kap. 3 Aufgabenstellung – Merkmalsanalysen

Kap 4 Aufgabenstellung – Übergreifende Aspekte.

Kap 8 Aufgabenbearbeitungen

Dokumentation

Vorgaben, Aufgaben und Auswertungsanleitungen für die ZP-10 – 2008 in Nordrhein-Westfalen

D-1 Die „HSA-Prüfung“ für Hauptschule 10 A und Gesamtschule / Grundkurs

D-1.1 Die *Vorgaben* des Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen

D-1.2 Die *Aufgaben*

D-1.3 Die *Auswertungsanleitungen* des Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen

D-1 Die „MSA-Prüfung“ für Hauptschule 10 B, Realschule und Gesamtschule / Erweiterungskurs

D-2.1 Die *Vorgaben* des Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen

D-2.2 Die *Aufgaben*

D-2.3 Die *Auswertungsanleitungen* des Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen

D-3 Die „MSA-Gy-Prüfung“ für Gymnasium

D-3.1 Die *Vorgaben* des Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen

D-3.2 Die *Aufgaben*

D-3.3 Die *Auswertungsanleitungen* des Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen

D-1 Die „HSA-Prüfung“ für Hauptschule 10 A und Gesamtschule / Grundkurs

Zentrale Prüfungen am Ende der Klasse 10 an Hauptschulen

Unterrichtliche Voraussetzungen für die schriftlichen Prüfungen im Jahr 2008

Vorgaben für das Fach Mathematik (Klasse 10 Typ A)

1 Hinweise zur Konzeption und Vorbereitung der schriftlichen Prüfung

1.1 Struktur der schriftlichen Prüfung

Die schriftliche Prüfung besteht aus zwei Teilen:

Im ersten Teil werden Basiskompetenzen (vgl. Abschnitt 2.1) in einzelnen, nicht aufeinander bezogenen Teilaufgaben überprüft. Diese Teilaufgaben orientieren sich an den Aufgabenformaten der Lernstandserhebungen.

Im zweiten Teil werden komplexere Aufgaben mit jeweils mehreren Teilaufgaben zu einem Kontext gestellt. Mit diesen Aufgaben werden (vgl. Abschnitt 2.2) insgesamt Kompetenzen aus allen vier Prozessbereichen (*Argumentieren/Kommunizieren*, *Problemlösen*, *Modellieren*, *Werkzeuge*) und allen vier Inhaltsbereichen (*Arithmetik/Algebra*, *Funktionen*, *Geometrie*, *Stochastik*) überprüft. Die Aufgaben beziehen sich auf den Unterricht in den Jahrgangsstufen 9 und 10. Für ihre Bearbeitung können aber auch Kompetenzen erforderlich sein, welche die Schülerinnen und Schüler in den zurückliegenden Schuljahren erworben haben.

Bei der Auswertung der Aufgaben wird der Umgang mit Maßeinheiten sowie die Nachvollziehbarkeit, formale Angemessenheit und Genauigkeit der Darstellung von Lösungen gesondert berücksichtigt.

1.2 Vorbereitende Klassenarbeit

Die Schülerinnen und Schüler sollen auf die konkreten Bedingungen vorbereitet sein. Daher wird den Schulen empfohlen, in der Jahrgangsstufe 10 eine der regulären Klassenarbeiten unter den Bedingungen der zentralen Prüfung (z. B. Aufgabenformate des zweiten Prüfungsteils mit entsprechendem Bewertungsverfahren) zu schreiben.

1.3 Hilfsmittel

Die Schülerinnen und Schüler sollen im Umgang mit den folgenden in der schriftlichen Prüfung zugelassenen Hilfsmitteln vertraut sein:

- Zirkel und Geodreieck,
- Formelsammlung[1],
- Wissenschaftlicher Taschenrechner[2].

[1] Pauschal zugelassen sind handelsübliche Formelsammlungen ohne eigene Ergänzungen. Im Internetangebot „Prüfungen 10“ (http://www.learn-line.nrw.de/angebote/pruefungen10/) wird eine Formelsammlung zum Download angeboten.

[2] Zugelassen sind alle für die Schule üblichen elektronischen Rechenhilfsmittel. Genauere Bestimmungen können den separaten Erläuterungen „wissenschaftlicher Taschenrechner“ (http://www.learn-line.nrw.de/angebote/pruefungen10/download/Elektronische_Rechenhilfsmittel.pdf) entnommen werden.

2 Unterrichtliche Schwerpunkte für die Vorbereitung auf die schriftliche Prüfung im Jahr 2008

Grundlage für die zentral gestellten Aufgaben der schriftlichen Prüfung sind die Vorgaben des Kernlehrplans (gem. RdErl. d. Ministeriums für Schule, Jugend und Kinder v. 27.9.2004). Mit den Kompetenzerwartungen des Kernlehrplans sind nicht immer Festlegungen auf relevante Inhalte verbunden. Um allen Schülerinnen und Schülern vergleichbare Lerngelegenheiten bieten zu können, sind also zusätzlich konkretisierende Vorgaben für den Unterricht erforderlich.

Die Verpflichtung zur Beachtung der gesamten Obligatorik des Kernlehrplans – vor allem Kapitel 2 „Anforderungen am Ende der Sekundarstufe I" und Kapitel 3.3 „Kompetenzerwartungen am Ende der Jahrgangsstufe 10" – bleibt von den folgenden Schwerpunktsetzungen unberührt. Die Realisierung dieser Obligatorik liegt in der Verantwortung der Schule. Zur Vorbereitung auf die schriftliche Prüfung sind außerdem die in Kapitel 4 des Kernlehrplans aufgeführten Aufgaben zu beachten, die die fachlichen Standards und Kompetenzerwartungen veranschaulichen und konkretisieren.

Die folgenden Schwerpunktsetzungen gelten für die Vorbereitung auf die zentrale Prüfung im Jahr 2008.

2.1 Schwerpunktsetzungen für den ersten Teil der schriftlichen Prüfung

Alle Schülerinnen und Schüler sollen in solchen Kompetenzen gefördert werden, die für einen angemessenen Umgang mit Zahlen und Größen im Alltag sowie für das vertiefte Anwenden und Betreiben von Mathematik eine besondere Rolle spielen (Basiskompetenzen). Im Jahr 2008 werden folgende aus der Breite der Kompetenzbereiche ausgewählte Basiskompetenzen überprüft:

- Schätzen und Runden (siehe z. B. Aufgabe Schnur LSE 2005, Aufgabe Schulbus LSE 2004, Beispielarbeit Prüfungen 10: Aufgabe 1a) und 1d)),
- die Bestimmung von Flächen und Volumina bei einfachen Figuren und Körpern (Dreiecke, Vierecke, Kreise, Quader und Zylinder sowie daraus zusammengesetzte Figuren bzw. Körper; siehe z. B. Aufgabe Flächeninhalte LSE 2005, Beispielarbeit Prüfungen 10: Aufgabe 1c)),
- das Erkennen einfacher proportionaler und antiproportionaler Zuordnungen (siehe z. B. Aufgabe Brötchen LSE 2004) sowie das Bestimmen von Prozentwerten (siehe z. B. Aufgabe Prozente LSE 2005, Beispielarbeit Prüfungen 10: Aufgabe 1e)),
- die Entnahme mathematischer Informationen aus einfachen Texten, Grafiken und Diagrammen (siehe z. B. Aufgabe Fahrradtour LSE 2005, Beispielarbeit Prüfungen 10: Aufgabe 1f)),
- der Umgang mit statistischen Kennwerten (arithmetisches Mittel und Median) (siehe z. B. Aufgabe Weitsprung LSE 2004).

2.2 Thematisch-inhaltliche Schwerpunkte für den zweiten Teil der schriftlichen Prüfung

Da angemessene Lernsituationen im Mathematikunterricht immer inhalts- und prozessbezogene Kompetenzen zugleich fördern, werden die gemeinsamen Lerngelegenheiten, die allen Schülerinnen und Schüler ermöglicht werden sollen, in der folgenden „Kompetenzmatrix" verortet. Die empfohlenen gemeinsamen Lerngelegenheiten skizzieren Themen und Inhalte, durch deren Bearbeitung alle Schülerinnen und Schüler auf Anforderungen der schriftlichen Prüfung vorbereitet werden können.

	Arithmetik / Algebra	Funktionen	Geometrie	Stochastik
Argumentieren / Kommunizieren		- Analyse und Bewertung funktionaler Zusammenhänge in authentischen Texten (z. B. Zeitungstexte oder Gebrauchsanweisungen) - Interpretation von einfachen grafischen Darstellungen funktionaler Zusammenhänge		Analyse von grafischen Darstellungen statistischer Daten (z. B. „manipulierte" Diagramme aus Zeitungsartikeln)
Problemlösen			Bestimmung unbekannter Größen durch Zerlegen von Figuren oder mit Hilfe des Satzes von Pythagoras	
Modellieren	Sachrechnen (z. B. Berechnung von Kosten, Bestimmung von Anzahlen oder von physikalischen Größen wie Temperaturunterschiede)	Erstellung, Nutzung und Interpretation von Modellen aus den Bereichen: - Tarife (lineare Tarife und Stufentarife) - Prozent- und Zinsrechnung (z. B. Preisreduktion, Spar- und Kreditmodelle) - Weg-Zeit-Zusammenhänge		Zuordnung von Diagrammen zu gegebenen Realsituationen
Werkzeuge	Verwendung des Taschenrechners		Nutzung von geeigneten Werkzeugen (z. B. zum Zeichnen von Netzen und Schrägbildern)	

3 Beispielarbeiten

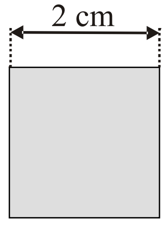
Diese unterrichtlichen Vorgaben werden durch Beispielarbeiten und veröffentlichte Prüfungsarbeiten konkretisiert, denen die schulformspezifischen und bildungsgangbezogenen Ausformungen der Kompetenzen zugrunde liegen. Dadurch wird u. a. das Anforderungsniveau der schriftlichen Prüfung veranschaulicht.

Prüfungsteil 1: Aufgabe 1

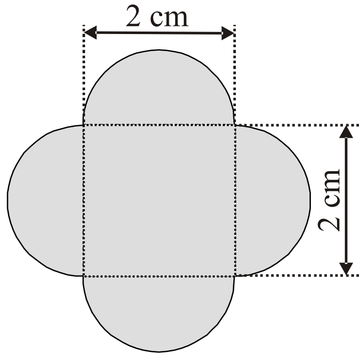
a) Ein Auto fährt 15 Kilometer in 10 Minuten. Wie viele Kilometer fährt das Auto in einer Stunde, wenn es diese Geschwindigkeit beibehält? Notiere deine Rechnung.

b) 600 Kisten müssen transportiert werden. Der hierfür zur Verfügung stehende LKW kann bis zu 96 Kisten laden. Wie viele Fahrten mit diesem LKW sind mindestens erforderlich, um alle Kisten zu transportieren? Notiere deine Rechnung.

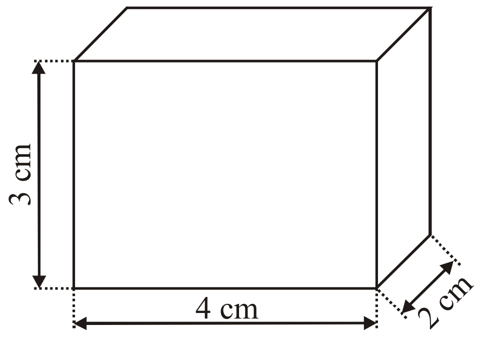
c) Berechne den Umfang des abgebildeten Quadrates. Notiere deine Rechnung.



d) Berechne den Flächeninhalt der gesamten grauen Fläche. Notiere deine Rechnung.



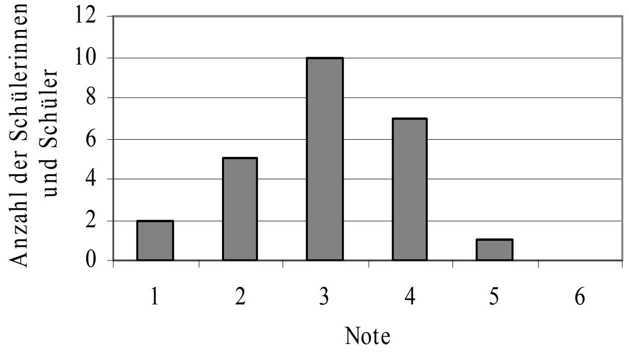
e) Berechne das Volumen des abgebildeten Quaders. Notiere deine Rechnung.



f) Im Diagramm sind die Ergebnisse einer Klassenarbeit dargestellt.

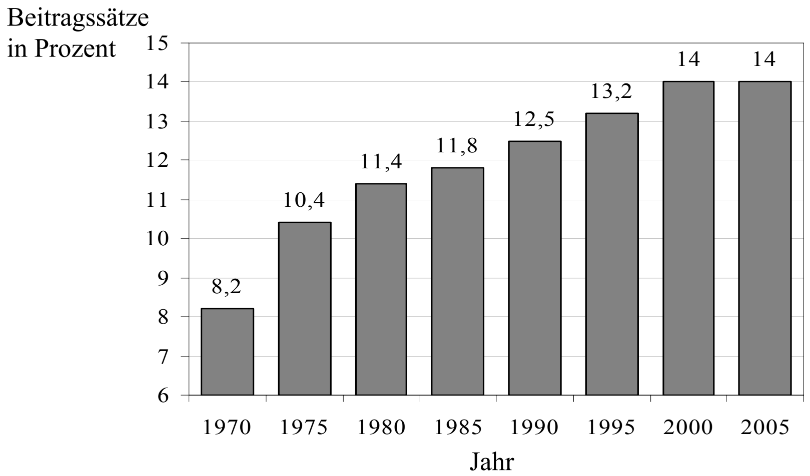
f1) Wie viele Schülerinnen und Schüler haben die Note 2 geschrieben?

f2) Wie viele Schülerinnen und Schüler haben diese Klassenarbeit mitgeschrieben? Notiere deine Rechnung.



Prüfungsteil 2: Aufgabe 2

Im Diagramm sind Beitragssätze zur Krankenversicherung aus dem Zeitraum 1970 bis 2005 dargestellt.



a) Wie hoch war der Beitragssatz im Jahr 1980?

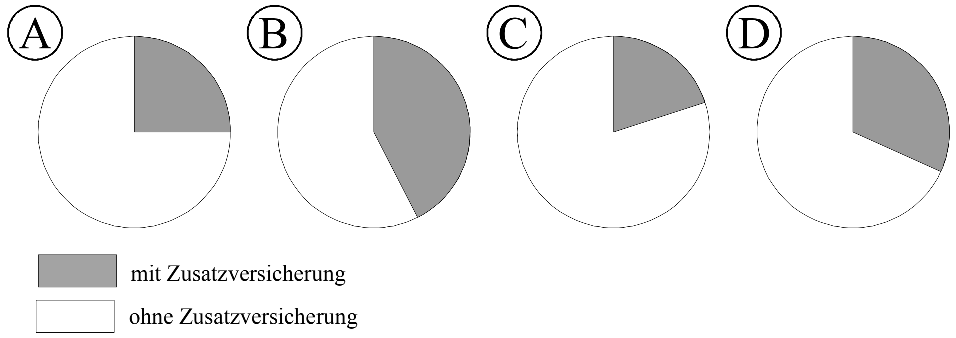
b) Tom sagt: „Von 1970 bis 2000 hat sich der Beitragssatz mehr als verdoppelt." Stimmt das? Begründe deine Aussage.

c) Im Jahr 2005 mussten 14 % des Bruttolohns an die Krankenversicherung bezahlt werden. Die Hälfte davon musste der Arbeitnehmer selber zahlen.

Ein Dachdecker hatte einen Bruttolohn von 2 200 €. Wie viel Euro musste er an die Krankenversicherung bezahlen? Notiere deine Rechnung.

d) 20 % der Arbeitnehmer haben eine Zusatzversicherung.

d1) Welches der folgenden Diagramme entspricht diesem Sachverhalt? Notiere den Lösungsbuchstaben in deinen Unterlagen.



d2) Welche der folgenden Aussagen treffen zu? Notiere die Lösungsbuchstaben der richtigen Aussagen in deinen Unterlagen.

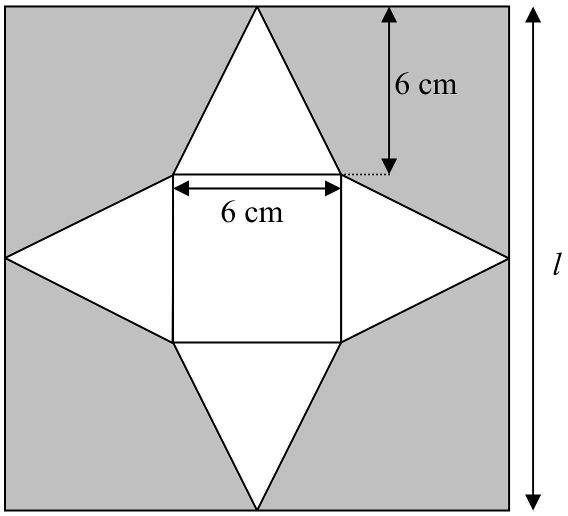
A Jeder fünfte Arbeitnehmer hat eine Zusatzversicherung.

B Jeder zwanzigste Arbeitnehmer hat eine Zusatzversicherung.

C Ein Fünftel der Arbeitnehmer hat eine Zusatzversicherung.

D 20 Arbeitnehmer haben eine Zusatzversicherung.

Prüfungsteil 2: Aufgabe 3



Maren bastelt Sterne aus Pappe. Sie zeichnet dazu ein Quadrat. An die vier Seiten des Quadrates zeichnet sie gleich große Dreiecke.

a) Berechne die Seitenlänge l der oben abgebildeten Pappe. Notiere deine Rechnung.

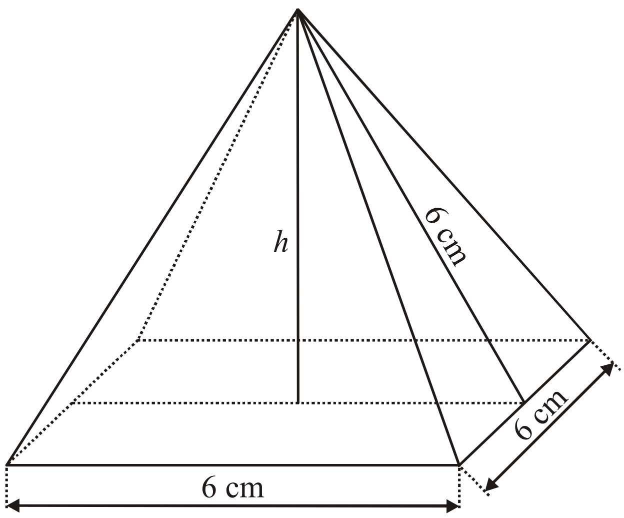
b) Berechne den Flächeninhalt des Sterns. Notiere deine Rechnung.

c) Maren klappt ein Dreieck nach innen.

   c1) Zeichne das weiße Quadrat, auf dem ein vollständig umgeklapptes Dreieck liegt, in Originalgröße.

   c2) Wie viel Prozent der Quadratfläche werden durch die Dreiecksfläche bedeckt?

Wenn Maren alle vier Dreiecke hochklappt, entsteht eine Pyramide.



d) Bestätige durch eine Rechnung, dass die Höhe h der Pyramide ca. 5,2 cm beträgt.

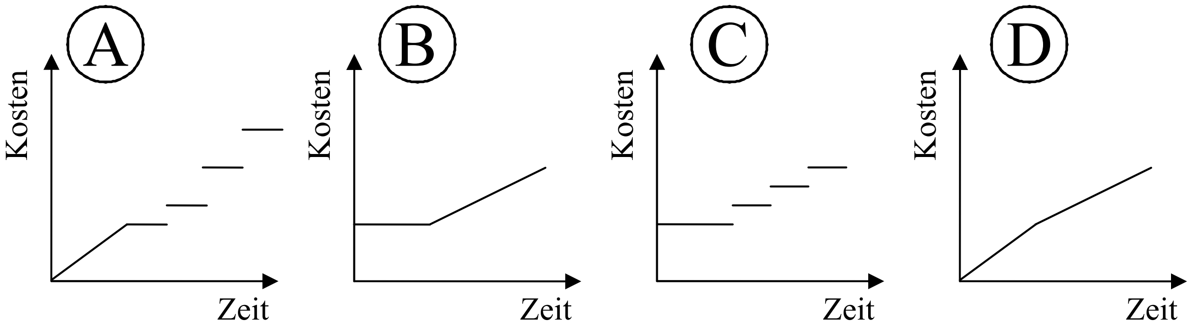
e) Berechne das Volumen dieser Pyramide ($h \approx 5{,}2$ cm). Notiere deine Rechnung.

Prüfungsteil 2: Aufgabe 4

Die Eintrittspreise im Freizeitbad WATERWORLD werden nach der folgenden Regel berechnet:

- Bis 2 Stunden: 6,00 €
- Für jede weitere angefangene Stunde zusätzlich: 2,00 €

a) Welches Schaubild stellt die Eintrittspreise am besten dar?
Notiere den Lösungsbuchstaben in deinen Unterlagen.



b) Eine Tageskarte im Freizeitbad WATERWORLD kostet 15,00 €.

b1) Franzi will 5 Stunden ins Freizeitbad gehen. Lohnt sich der Kauf einer Tageskarte für sie? Begründe deine Antwort.

b2) Marco kauft sich um 9:25 Uhr eine Tageskarte. Bis wie viel Uhr muss er mindestens im Freizeitbad WATERWORLD bleiben, damit sich der Kauf der Tageskarte lohnt? Notiere deine Rechnung.

c) Im Jahr 2006 zählte das Freizeitbad WATERWORLD insgesamt 182 880 Badegäste.

c1) Wie viel Euro hat das Freizeitbad im Jahr 2006 mindestens eingenommen? Notiere deine Rechnung.

c2) Wie hoch war die durchschnittliche Zahl der Badegäste pro Monat im Jahr 2006? Notiere deine Rechnung.

c3) Für das Jahr 2007 wird erwartet, dass die Zahl der Badegäste um 5 % steigt. Wie viele Besucher werden im Jahr 2007 erwartet? Notiere deine Rechnung.

d) Die Länge einer Bahn im Freizeitbad WATERWORLD beträgt 25 m.

d1) Wie viele Bahnen muss Franzi schwimmen, um eine Strecke von 1 km zurückzulegen? Notiere deine Rechnung.

d2) Franzi braucht für die ersten vier Bahnen insgesamt zwei Minuten. Wie lange braucht sie für die gesamte Strecke (1 km), wenn sie dieses Tempo gleichmäßig halten kann? Notiere deine Rechnung.

Prüfungsteil 1: Aufgabe 1

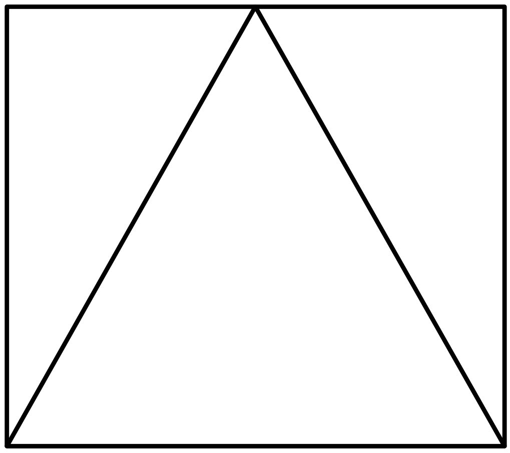
	Kriterien: Der Prüfling …	**Lösung:**	**Punkte:**
a)	wählt ein Verfahren zur Berechnung der zurückgelegten Distanz und gibt diese richtig an	z. B. 15 km · 6 = 90 km	2
b)	wählt ein für einen proportionalen Zusammenhang geeignetes Verfahren	z. B. Division	1
	führt die Rechnung richtig durch	z. B. 600 : 96 = 6,25	1
	rundet das Ergebnis sinnvoll	z. B. „Es sind mindestens 7 Fahrten erforderlich mit dem LKW.“	1
c)	entnimmt der Abbildung und dem Text die notwendigen Informationen	Quadrat mit der Seitenlänge 2 cm	1
	berechnet den Umfang des Quadrates richtig	z. B. $u = 2\text{ cm} \cdot 4 = 8\text{ cm}$	1
d)	entnimmt der Abbildung den Radius bzw. Durchmesser	$r = 1$ cm bzw. $d = 2$ cm	1
	zerlegt die Figur in geeignete Teilfiguren	z. B. Quadrat und vier Halbkreise	1
	berechnet den Flächeninhalt des Quadrates	$2\text{ cm} \cdot 2\text{ cm} = 4\text{ cm}^2$	1
	berechnet den Flächeninhalt der vier Halbkreise	$2 \cdot \pi \cdot r^2 \approx 6{,}28\text{ cm}^2$	2
	berechnet den gesamten Flächeninhalt	$4\text{ cm}^2 + 6{,}28\text{ cm}^2 = 10{,}28\text{ cm}^2$	1
	wählt einen anderen Lösungsweg, der sachlich richtig ist		(max. 6)
e)	entnimmt der Abbildung die relevanten Maße	z. B. $a = 2$ cm; $b = 3$ cm; $c = 4$ cm	1
	wählt ein geeignetes Verfahren zur Berechnung des Volumens und bestimmt das Volumen	$V = 2\text{ cm} \cdot 3\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} = 24\text{ cm}^3$	2
f1)	entnimmt dem Diagramm die gesuchte Anzahl	z. B. „Fünf Schüler haben eine 2 geschrieben.“	2
f2)	entnimmt dem Diagramm die relevanten Informationen	2 / 5 / 10 / 7 / 1	2
	berechnet die Anzahl der Schüler, die an der Klassenarbeit teilgenommen haben	2 + 5 + 10 + 7 + 1 = 25	1
			Punkte Aufgabe 1: 21 Punkte

Prüfungsteil 2: Aufgabe 2

	Kriterien: Der Prüfling …	**Lösung:**	**Punkte:**
a)	gibt nur den richtigen Beitragssatz an	11,4 %	1
b)	gibt an, dass Tom Unrecht hat	z. B. „Der Beitragssatz hat sich nicht verdoppelt.“	1
	begründet, dass Tom Unrecht hat	z. B. „Der Beitragssatz 2000 hätte dann 16,4 % betragen müssen. Er betrug aber nur 14 %.“	1
c)	entnimmt dem Text die relevanten Informationen	2 200 €; 14 %; Arbeitnehmer zahlt die Hälfte	1
	wählt ein geeignetes Verfahren zur Berechnung des Prozentwertes	z. B. Formel *oder* Dreisatz	1
	führt die Rechnung richtig durch	z. B. $^1/_2 \cdot 0{,}14 \cdot 2\,200$ € = 154 €	2
	wählt einen anderen Lösungsweg, der sachlich richtig ist		(max. 4)
d1)	notiert nur den richtigen Lösungsbuchstaben	C	1
d2)	notiert genau die beiden richtigen Lösungsbuchstaben	A und C	2
			Punkte Aufgabe 2: 10 Punkte

Prüfungsteil 2: Aufgabe 3

	Kriterien: Der Prüfling …	**Lösung:**	**Punkte:**
a)	entnimmt der Abbildung die relevanten Daten	z. B. Seitenlänge des Quadrats: 6 cm; Höhe eines Dreiecks: 6 cm	1
	berechnet die Mindestmaße der Pappe	z. B. 6 cm · 3 = 18 cm	1
	wählt einen anderen Lösungsweg, der sachlich richtig ist		(max. 2)
b)	berechnet den Flächeninhalt des Quadrates, der Dreiecke und die Gesamtfläche	Quadratfläche: 36 cm^2 Dreiecksfläche: 18 cm^2 Gesamtfläche: 36 cm^2 + 4 · 18 cm^2 = 108 cm^2	1 1 1
	wählt einen anderen Lösungsweg, der sachlich richtig ist		(max. 3)

c1)	zeichnet ein Quadrat (Seitenlänge 6 cm) in Originalgröße mit einem gleichschenkligen Dreieck (Höhe 6 cm) über einer Quadratseite	z. B. 	3
c2)	bestimmt den Prozentsatz, den die Dreiecksfläche an der Quadratfläche einnimmt	Die Dreiecksfläche macht 50 % der Quadratfläche aus.	2
d)	erkennt die Pythagoras-Situation und entnimmt dem Text, der Zeichnung bzw. der Tabelle die relevanten Informationen	6 cm	2
			1
	wendet den Satz des Pythagoras angemessen an	$h^2 = (6\text{ cm})^2 - (^1/_2 \cdot 6\text{ cm})^2$ $= 27\text{ cm}^2$	1
	berechnet die Höhe	$h \approx 5{,}2$ cm	
e)	entnimmt der Zeichnung und dem Text die relevanten Informationen	Quadratseite: 6 cm; Höhe: ca. 5,2 cm	1
	wählt ein geeignetes Verfahren zur Berechnung des Volumens einer Pyramide	z. B. Volumenformel	1
	berechnet das Volumen der Pyramide	$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot (6\text{ cm})^2 \cdot 5{,}2\text{ cm}$ $\approx 62{,}4\text{ cm}^3$	1
	Punkte Aufgabe 3: 17 Punkte		

Prüfungsteil 2: Aufgabe 4

	Kriterien: Der Prüfling …	**Lösung:**	**Punkte:**
a)	gibt nur den Buchstaben des passenden Schaubildes an	C	1
b1)	berechnet die Kosten	z. B. 5 – 2 = 3 6 € + 3 · 2 € = 12 €	1
	begründet, dass sich der Kauf einer Tageskarte für sie nicht lohnt	z. B. „12 € ist weniger 15 €, also lohnt sich die Tageskarte für sie nicht.“	1
	wählt einen anderen Lösungsweg, der sachlich richtig ist		(max. 2)

b2)	ermittelt die Besuchszeit, bei der (ohne Tageskarte) mehr als 15 € zu zahlen sind	z. B. schrittweises Addieren „Bei mehr als 6 Stunden im Freizeitbad muss man ohne Tageskarte mindestens 16 € bezahlen. Für Marco lohnt sich der Kauf der Tageskarte, wenn er mindestens bis 15:26 Uhr im Freizeitbad bleibt.“ (15:25 Uhr wird ebenfalls akzeptiert)	2
	wählt einen anderen Lösungsweg, der sachlich richtig ist		(max. 2)
c1)	entnimmt der Aufgabenstellung die relevanten Informationen und berechnet die Mindesteinnahmen	Mindestpreis je Besucher: 6 €; Besucherzahl: 182 880 z. B. 6 € ·182 880 = 1 097 280 €	3
	wählt einen anderen Lösungsweg, der sachlich richtig ist		(max. 3)
c2)	wählt einen geeigneten Ansatz zur Berechnung der durchschnittlichen Besucherzahl pro Monat	182 880 : 12	1
	führt die Rechnung richtig durch	durchschnittliche Besucherzahl pro Monat: 15 240	1
c3)	wählt ein geeignetes Verfahren zur Berechnung der 2007 erwarteten Besucherzahl	z. B. Formel	1
	berechnet die Besucherzahl	z. B. 0,05 · 182 880 = 9 144; 182 880 + 9 144 = 192 024 (auch ein angemessen gerundeter Wert, z. B. 192 000, wird als Ergebnis akzeptiert)	2
d1)	entnimmt dem Text die relevanten Informationen	Strecke: 1 km; Bahnlänge: 25 m	1
	berechnet die Anzahl der zurückzulegenden Bahnen	z. B. 1 km = 1 000 m 1000 m : 25 m = 40	1
d2)	entnimmt dem Text die relevanten Informationen	4 Bahnen, 2 Minuten, 25 m Bahnlänge	1
	berechnet die Anzahl der zurückzulegenden Bahnen und die dafür benötigte Zeit	z. B. 4 · 25 m= 100 m; 1 000 m : 100 m = 10; 10 · 2 Minuten = 20 Minuten	1
	wählt einen anderen Lösungsweg, der sachlich richtig ist		(max. 2)
	Punkte Aufgabe 4: 17 Punkte		

Umgang mit Maßeinheiten

Der Prüfling gibt bei Ergebnissen angemessene Maßeinheiten an.

O nie oder fast nie (0 Punkte)
O teilweise (1 Punkt)
O fast immer oder immer (2 Punkte)

Darstellungsleistung

Der Prüfling stellt seine Bearbeitung nachvollziehbar und formal angemessen dar und arbeitet bei erforderlichen Zeichnungen hinreichend genau.

O nie oder fast nie (0 Punkte)
O teilweise (2 Punkte)
O fast immer oder immer (4 Punkte)

Übersicht über die Punkteverteilung

Prüfungsteil 1: Aufgabe 1	21
Prüfungsteil 2: Aufgabe 2	10
Prüfungsteil 2: Aufgabe 3	17
Prüfungsteil 2: Aufgabe 4	17
Umgang mit Maßeinheiten	2
Darstellungsleistung	4
Gesamt	71

Notentabelle

Note	Punkte
sehr gut	62 – 71
gut	52 – 61
befriedigend	42 – 51
ausreichend	32 – 41
mangelhaft	13 – 31
ungenügend	0 – 12

Ministerium für
Schule und Weiterbildung
des Landes Nordrhein-Westfalen

Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit im Fach Mathematik
(Hauptschule Typ A)

Name: ______________________________ Klasse: ___________

Schule: ______________________________

Prüfungsteil 1: Aufgabe 1					
	Anforderung	**Lösungsqualität**			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK[1] Punktzahl	ZK[1] Punktzahl	DK[1] Punktzahl
a)	wählt ein Verfahren zur Berechnung der …	2			
b)	wählt ein für einen proportionalen …	1			
	führt die Rechnung richtig durch	1			
	rundet das Ergebnis sinnvoll	1			
c)	entnimmt der Abbildung und dem Text …	1			
	berechnet den Umfang des Quadrates …	1			
d)	entnimmt der Abbildung den Radius …	1			
	zerlegt die Figur in geeignete Teilfiguren	1			
	berechnet den Flächeninhalt des Quadrates	1			
	berechnet den Flächeninhalt der …	2			
	berechnet den gesamten Flächeninhalt	1			
	wählt einen anderen Lösungsweg …	(6)			
e)	entnimmt der Abbildung die relevanten Maße	1			
	wählt ein geeignetes Verfahren zur …	2			
f1)	entnimmt dem Diagramm die gesuchte Anzahl	2			
f2)	entnimmt dem Diagramm die relevanten …	2			
	berechnet die Anzahl der Schüler …	1			
	Summe	**21**			

Prüfungsteil 2: Aufgabe 2					
	Anforderung	**Lösungsqualität**			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK Punktzahl	ZK Punktzahl	DK Punktzahl
a)	gibt nur den richtigen Beitragssatz an	1			
b)	gibt an, dass Tom Unrecht hat	1			
	begründet, dass Tom Unrecht hat	1			

[1] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Ministerium für
Schule und Weiterbildung
des Landes Nordrhein-Westfalen

prüfungen.10

c)	entnimmt dem Text die relevanten …	1			
	wählt ein geeignetes Verfahren zur …	1			
	führt die Rechnung richtig durch	2			
	wählt einen anderen Lösungsweg …	(4)			
d1)	notiert nur den richtigen Lösungsbuchstaben	1			
d2)	notiert genau die beiden richtigen …	2			
	Summe	**10**			

Prüfungsteil 2: Aufgabe 3					
	Anforderung	**Lösungsqualität**			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK Punktzahl	ZK Punktzahl	DK Punktzahl
a)	entnimmt der Abbildung die relevanten …	1			
	berechnet die Mindestmaße der Pappe	1			
	wählt einen anderen Lösungsweg …	(2)			
b)	Quadratfläche	1			
	Dreiecksfläche	1			
	Gesamtfläche	1			
	wählt einen anderen Lösungsweg …	(3)			
c1)	zeichnet ein Quadrat (Seitenlänge 6 cm) …	3			
c2)	bestimmt den Prozentsatz, den die …	2			
d)	erkennt die Pythagoras-Situation und …	2			
	wendet den Satz des Pythagoras angemessen an	1			
	berechnet die Höhe	1			
e)	entnimmt der Zeichnung und dem Text …	1			
	wählt ein geeignetes Verfahren zur …	1			
	berechnet das Volumen der Pyramide	1			
	Summe	**17**			

Prüfungsteil 2: Aufgabe 4					
	Anforderung	**Lösungsqualität**			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK Punktzahl	ZK Punktzahl	DK Punktzahl
a)	gibt nur den Buchstaben des passenden …	1			
b1)	berechnet die Kosten	1			
	begründet, dass sich der Kauf einer …	1			
	wählt einen anderen Lösungsweg …	(2)			
b2)	ermittelt die Besuchszeit, bei der …	2			
	wählt einen anderen Lösungsweg …	(2)			

c1)	entnimmt der Aufgabenstellung die relevanten …	**3**			
	wählt einen anderen Lösungsweg …	**(3)**			
c2)	wählt einen geeigneten Ansatz zur …	**1**			
	führt die Rechnung richtig durch	**1**			
c3)	wählt ein geeignetes Verfahren zur …	**1**			
	berechnet die Besucherzahl	**2**			
d1)	entnimmt dem Text die relevanten Informationen	**1**			
	berechnet die Anzahl der zurückzulegenden …	**1**			
d2)	entnimmt dem Text die relevanten Informationen	**1**			
	berechnet die Anzahl der zurückzulegenden …	**1**			
	wählt einen anderen Lösungsweg …	**(2)**			
	Summe	**17**			

		maximal erreichbare Punktzahl	EK Punktzahl	ZK Punktzahl	DK Punktzahl
	Umgang mit Maßeinheiten	**2**			
	Darstellungsleistung	**4**			

Festsetzung der Note

	maximal erreichbare Punktzahl	EK Punktzahl	ZK Punktzahl	DK Punktzahl
Aufgabe 1	**21**			
Aufgabe 2	**10**			
Aufgabe 3	**17**			
Aufgabe 4	**17**			
Umgang mit Maßeinheiten	**2**			
Darstellungsleistung	**4**			
Gesamtpunktzahl	**71**			
Paraphe				

Die Prüfungsarbeit wird mit der Note ______________________________ bewertet.

Unterschriften, Datum:

D-1 Die „MSA-Prüfung“ für Hauptschule 10 B, Realschule und Gesamtschule / Erweiterungskurs

D-2.1 Die Vorgaben des Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen

D-2.2 Die Aufgaben

D-2.3 Die Auswertungsanleitungen des Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen

Zentrale Prüfungen am Ende der Klasse 10 an Realschulen

Unterrichtliche Voraussetzungen für die schriftlichen Prüfungen im Jahr 2008

Vorgaben für das Fach Mathematik

1 Hinweise zur Konzeption und Vorbereitung der schriftlichen Prüfung

1.1 Struktur der schriftlichen Prüfung

Die schriftliche Prüfung besteht aus zwei Teilen:

Im ersten Teil werden Basiskompetenzen (vgl. Abschnitt 2.1) in einzelnen, nicht aufeinander bezogenen Teilaufgaben überprüft. Diese Teilaufgaben orientieren sich an den Aufgabenformaten der Lernstandserhebungen.

Im zweiten Teil werden komplexere Aufgaben mit jeweils mehreren Teilaufgaben zu einem Kontext gestellt. Mit diesen Aufgaben werden (vgl. Abschnitt 2.2) insgesamt Kompetenzen aus allen vier Prozessbereichen (*Argumentieren/Kommunizieren*, *Problemlösen*, *Modellieren*, *Werkzeuge*) und allen vier Inhaltsbereichen (*Arithmetik/Algebra*, *Funktionen*, *Geometrie*, *Stochastik*) überprüft. Die Aufgaben beziehen sich auf den Unterricht in den Jahrgangsstufen 9 und 10. Für ihre Bearbeitung können aber auch Kompetenzen erforderlich sein, welche die Schülerinnen und Schüler in den zurückliegenden Schuljahren erworben haben.

Bei der Auswertung der Aufgaben wird der Umgang mit Maßeinheiten sowie die Nachvollziehbarkeit, formale Angemessenheit und Genauigkeit der Darstellung von Lösungen gesondert berücksichtigt.

1.2 Vorbereitende Klassenarbeit

Die Schülerinnen und Schüler sollen auf die konkreten Bedingungen vorbereitet sein. Daher wird den Schulen empfohlen, in der Jahrgangsstufe 10 eine der regulären Klassenarbeiten unter den Bedingungen der zentralen Prüfung (z. B. Aufgabenformate des zweiten Prüfungsteils mit entsprechendem Bewertungsverfahren) zu schreiben.

1.3 Hilfsmittel

Die Schülerinnen und Schüler sollen im Umgang mit den folgenden in der schriftlichen Prüfung zugelassenen Hilfsmitteln vertraut sein:

- Zirkel und Geodreieck,
- Formelsammlung[1],
- Wissenschaftlicher Taschenrechner[2].

[1] Pauschal zugelassen sind handelsübliche Formelsammlungen ohne eigene Ergänzungen. Im Internetangebot „Prüfungen 10“ (http://www.learn-line.nrw.de/angebote/pruefungen10/) wird eine Formelsammlung zum Download angeboten.

[2] Zugelassen sind alle für die Schule üblichen elektronischen Rechenhilfsmittel. Genauere Bestimmungen können den separaten Erläuterungen „wissenschaftlicher Taschenrechner“ (http://www.learn-line.nrw.de/angebote/pruefungen10/download/Elektronische_Rechenhilfsmittel.pdf) entnommen werden.

2 Unterrichtliche Schwerpunkte für die Vorbereitung auf die schriftliche Prüfung im Jahr 2008

Grundlage für die zentral gestellten Aufgaben der schriftlichen Prüfung sind die Vorgaben des Kernlehrplans (gem. RdErl. d. Ministeriums für Schule, Jugend und Kinder v. 27.9.2004). Mit den Kompetenzerwartungen des Kernlehrplans sind nicht immer Festlegungen auf relevante Inhalte verbunden. Um allen Schülerinnen und Schülern vergleichbare Lerngelegenheiten bieten zu können, sind also zusätzlich konkretisierende Vorgaben für den Unterricht erforderlich.

Die Verpflichtung zur Beachtung der gesamten Obligatorik des Kernlehrplans – vor allem Kapitel 2 „Anforderungen am Ende der Sekundarstufe I“ und Kapitel 3.3 „Kompetenzerwartungen am Ende der Jahrgangsstufe 10“ – bleibt von den folgenden Schwerpunktsetzungen unberührt. Die Realisierung dieser Obligatorik liegt in der Verantwortung der Schule. Zur Vorbereitung auf die schriftliche Prüfung sind außerdem die in Kapitel 4 des Kernlehrplans aufgeführten Aufgaben zu beachten, die die fachlichen Standards und Kompetenzerwartungen veranschaulichen und konkretisieren.

Die folgenden Schwerpunktsetzungen gelten für die Vorbereitung auf die zentrale Prüfung im Jahr 2008.

2.1 Schwerpunktsetzungen für den ersten Teil der schriftlichen Prüfung

Alle Schülerinnen und Schüler sollen in solchen Kompetenzen gefördert werden, die für einen angemessenen Umgang mit Zahlen und Größen im Alltag sowie für das vertiefte Anwenden und Betreiben von Mathematik eine besondere Rolle spielen (Basiskompetenzen). Im Jahr 2008 werden folgende aus der Breite der Kompetenzbereiche ausgewählte Basiskompetenzen überprüft:

- Schätzen und Runden (siehe z. B. Aufgabe Schnur LSE 2005, Aufgabe Schulbus LSE 2004, Beispielarbeit Prüfungen 10: Aufgabe 1a) und 1e)),
- die Bestimmung von Flächen und Volumina bei einfachen Figuren und Körpern (Dreiecke, Vierecke, Kreise, Quader und Zylinder sowie daraus zusammengesetzte Figuren bzw. Körper; siehe z. B. Aufgabe Flächeninhalte LSE 2005, Beispielarbeit Prüfungen 10: Aufgabe 1c) und d)),
- das Erkennen einfacher proportionaler und antiproportionaler Zuordnungen (siehe z. B. Aufgabe Brötchen LSE 2004, Beispielarbeit Prüfungen 10: Aufgabe 1b)),
- die Entnahme mathematischer Informationen aus einfachen Texten, Grafiken und Diagrammen (siehe z. B. Aufgabe Fahrradtour LSE 2005, Beispielarbeit Prüfungen 10: Aufgabe 1f)),
- die Bestimmung von elementaren Wahrscheinlichkeiten (siehe z. B. Aufgabe Glücksrad LSE 2004),
- der Umgang mit Variablen, Termen und Gleichungen (siehe z. B. Aufgabe Kino LSE 2005).

2.2 Thematisch-inhaltliche Schwerpunkte für den zweiten Teil der schriftlichen Prüfung

Da angemessene Lernsituationen im Mathematikunterricht immer inhalts- und prozessbezogene Kompetenzen zugleich fördern, werden die gemeinsamen Lerngelegenheiten, die allen Schülerinnen und Schüler ermöglicht werden sollen, in der folgenden „Kompetenzmatrix“ verortet. Die empfohlenen gemeinsamen Lerngelegenheiten skizzieren Themen und Inhalte, durch deren Bearbeitung alle Schülerinnen und Schüler auf Anforderungen der schriftlichen Prüfung vorbereitet werden können.

	Arithmetik / Algebra	Funktionen	Geometrie	Stochastik
Argumentieren / Kommunizieren	Erläuterung mathematischer Zusammenhänge mit eigenen Worten und geeigneten Fachbegriffen beim Umgang mit linearen oder quadratischen Gleichungen	- Analyse und Bewertung funktionaler Zusammenhänge in authentischen Texten (z. B. Zeitungstexte oder Gebrauchsanweisungen) - Interpretation von grafischen Darstellungen funktionaler Zusammenhänge		Analyse von grafischen Darstellungen statistischer Daten und deren Manipulation (z. B. aus Zeitungsartikeln)
Problemlösen			Bestimmung unbekannter Größen durch Zerlegen von Figuren, mit Hilfe des Satzes von Pythagoras oder mit Hilfe von Ähnlichkeitsbeziehungen	
Modellieren		Erstellung, Nutzung und Interpretation von Modellen aus den Bereichen: - Tarife - Weg-Zeit-Zusammenhänge - Wachstumsprozesse (linear oder exponentiell) - Prozent-, Zins- und Zinseszinsrechnung (z. B. Preisreduktion, Spar- und Kreditmodelle)	Erstellung, Nutzung und Interpretation von Modellen aus den Bereichen: - Architektur (z. B. Formen von Gebäuden) - Verpackungen	Nutzung von Baumdiagrammen zur Beurteilung von Chancen und Risiken
Werkzeuge	Verwendung des Taschenrechners (z. B. kritische Reflexion von Ergebnissen)		Nutzung verfügbarer Werkzeuge zur Bearbeitung geometrischer Situationen (z. B. Nutzung von Zirkel und Geodreieck)	

3 Beispielarbeiten

Diese unterrichtlichen Vorgaben werden durch Beispielarbeiten und veröffentlichte Prüfungsarbeiten konkretisiert, denen die schulformspezifischen und bildungsgangbezogenen Ausformungen der Kompetenzen zugrunde liegen. Dadurch wird u. a. das Anforderungsniveau der schriftlichen Prüfung veranschaulicht.

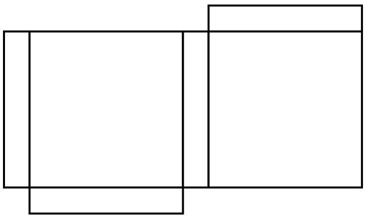
Prüfungsteil 1: Aufgabe 1

a) In welchem Maßstab müsste das abgebildete Modellauto vergrößert werden, damit es ungefähr so groß wäre wie das Original? Kreuze an!

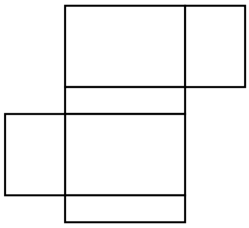
□ 1 : 10 □ 1 : 100 □ 1 : 1 000 □ 1 : 10 000

---

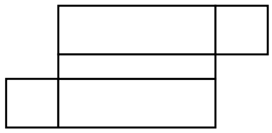
b) Kann man aus dem jeweiligen Netz einen geschlossenen Quader bauen? Kreuze an!



b_1) □ ja □ nein



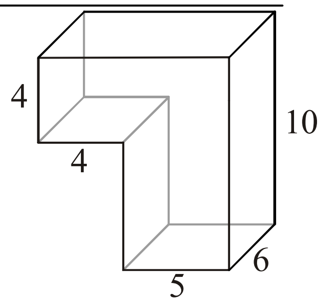
b_2) □ ja □ nein



b_3) □ ja □ nein

---

c) Berechne das Volumen des Werkstücks. Die Maße in der Zeichnung sind in cm angegeben. Notiere deine Rechnung.

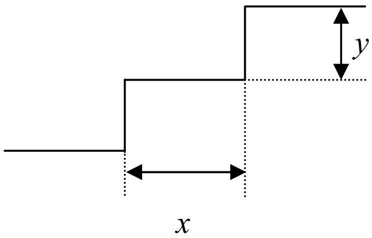


---

d) Für den Bau von Treppen verwendet man häufig die folgende „Schrittmaßregel“ (siehe Skizze):

$$x + 2\,y = 63 \text{ cm}$$

Gib ein Wertepaar für x und y an, das die Gleichung erfüllt und für den Bau einer Treppe sinnvoll ist.



---

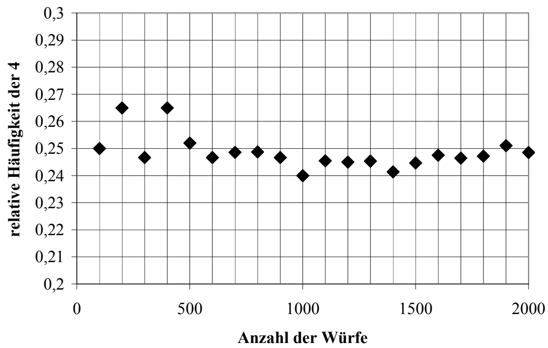
e) Blitz und Donner entstehen zur gleichen Zeit am gleichen Ort. Der Schall legt einen Kilometer in 3,3 Sekunden zurück. Das Licht ist so schnell, dass man es auch in großer Entfernung nahezu im Moment des Blitzes sieht.

e1) Wie weit ist ein Gewitter entfernt, wenn es 17 Sekunden nach dem Blitz donnert? Notiere deine Rechnung.

e2) Wie lange dauert es, bis es donnert, wenn der Blitz 8 km entfernt entsteht? Notiere deine Rechnung.

---

f) Ein mit den Zahlen „1“ bis „6“ beschrifteter Quader wurde insgesamt 2 000-mal geworfen. Das Diagramm zeigt die relative Häufigkeit des Wurfergebnisses „4“ nach 100, 200, 300, 400 usw. Würfen.

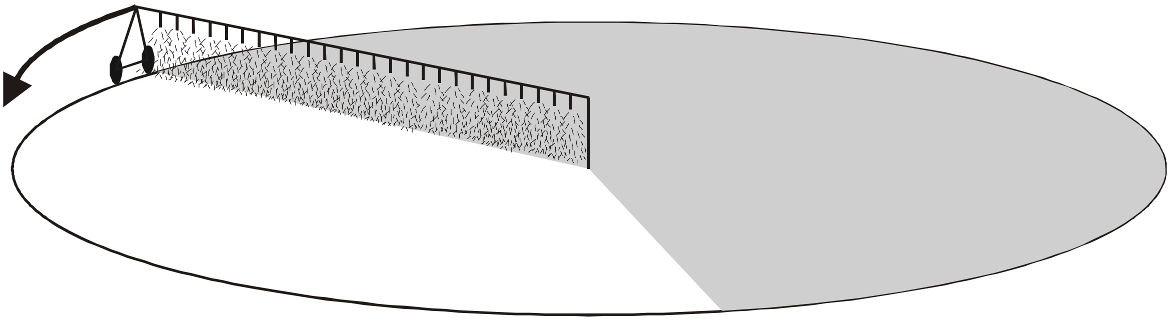


f1) Wie oft ist die „4“ bei 200 Würfen gefallen? Notiere deine Rechnung.

f2) Gib mit Hilfe des Diagramms einen Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit an, dass bei dem benutzten Quader eine „4“ fällt.

Prüfungsteil 2: Aufgabe 2

Auf vielen Getreidefeldern in den USA werden wegen der Trockenheit im Sommer Bewässerungsanlagen eingesetzt. Sie sind im Mittelpunkt fest montiert und lange „Arme“ mit Wasserrohren fahren auf großen Rädern kreisförmig über die Felder (siehe Abbildung).

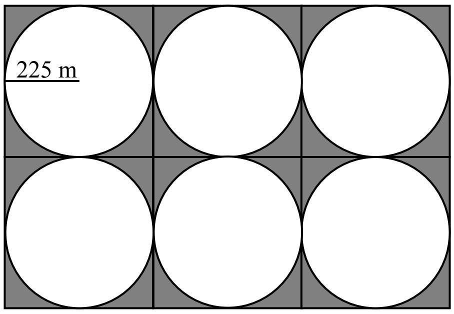


Farmer Jackson setzt Anlagen ein, die jeweils eine Armlänge von 225 m haben.

a) Berechne die Kreisfläche, die mit einer Anlage bewässert werden kann. Notiere deine Rechnung.

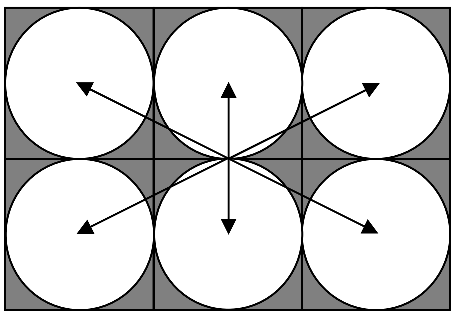
b) Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich der äußere Endpunkt eines solchen Wasserrohres, wenn die Anlage drei Umdrehungen in einer Stunde macht? Gib die Geschwindigkeit in km/h an. Notiere deine Rechnung.

Aus dem Flugzeug sieht Jacksons Getreidefeld aus wie auf der Skizze rechts: Die bewässerten Kreisflächen sehen grün (hier: weiß) aus, das andere Gelände ist braun (hier: grau).



c) Die Fläche, die nicht bewässert wird, soll berechnet werden. Beschreibe einen möglichen Lösungsweg, ohne zu rechnen.

Farmer Jackson muss seine Wasserleitungen erneuern, die von einem Brunnen in der Mitte des Geländes zu den Mittelpunkten aller Kreisflächen führen (siehe Pfeile).



d) Berechne die Gesamtlänge aller Wasserleitungen. Notiere deine Rechnung.

Prüfungsteil 2: Aufgabe 3

In Untersuchungen mit Sportlern wurden Schätzwerte für Fehlerwahrscheinlichkeiten in unterschiedlichen Situationen ermittelt. Ziel war es, mögliche Fehler durch zielgerichtetes Training weitgehend auszuschließen.

	Situation	Fehlerwahrscheinlichkeit
A	Einfache und häufig durchgeführte Aufgabe	0,001
B	oft geübte Aufgabe unter Zeitdruck	0,01
C	schwierige Aufgabe	0,1
D	schwierige Aufgabe unter Stress	0,3

a) In welcher der beschriebenen Situationen tritt die Fehlerwahrscheinlichkeit $1 \cdot 10^{-2}$ auf? Notiere den zugehörigen Buchstaben in deinen Unterlagen.

b) Ein Basketballspieler hat im Training eine Trefferquote von 90 % bei Freiwürfen. Welcher der Situationen entspricht dies? Notiere den zugehörigen Buchstaben in deinen Unterlagen.

c) Schwierige Aufgaben unter Stress werden von Sportlern mit einer Fehlerwahrscheinlichkeit von 0,3 ausgeführt. Beurteile, ob die folgenden Aussagen stimmen. Kreuze an.

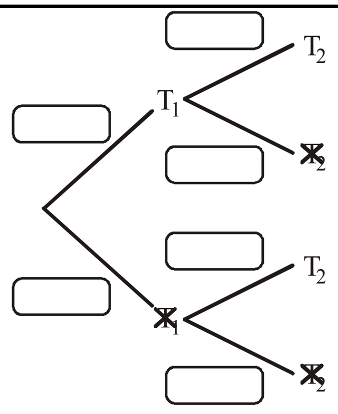
Das bedeutet, dass	stimmt	stimmt nicht
es in **etwa** 30 % der Fälle zu einem Fehler kommt.		
die Fehlerwahrscheinlichkeit $3 \cdot 10^{-1}$ beträgt.		
30 Fehler gemacht werden.		
in 3 von 10 Fällen **sicher** ein Fehler auftritt.		

d) In einem Spiel erhält ein Spieler zwei Freiwürfe. Seine Trefferwahrscheinlichkeit bei jedem Freiwurf in diesem Spiel beträgt stressbedingt nur noch 70 %.

d1) Trage in die Kästchen die Wahrscheinlichkeiten für die Äste ein.

d2) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Spieler bei beiden Freiwürfen trifft? Notiere deine Rechnung.

d3) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird er nur einmal treffen? Notiere deine Rechnung.

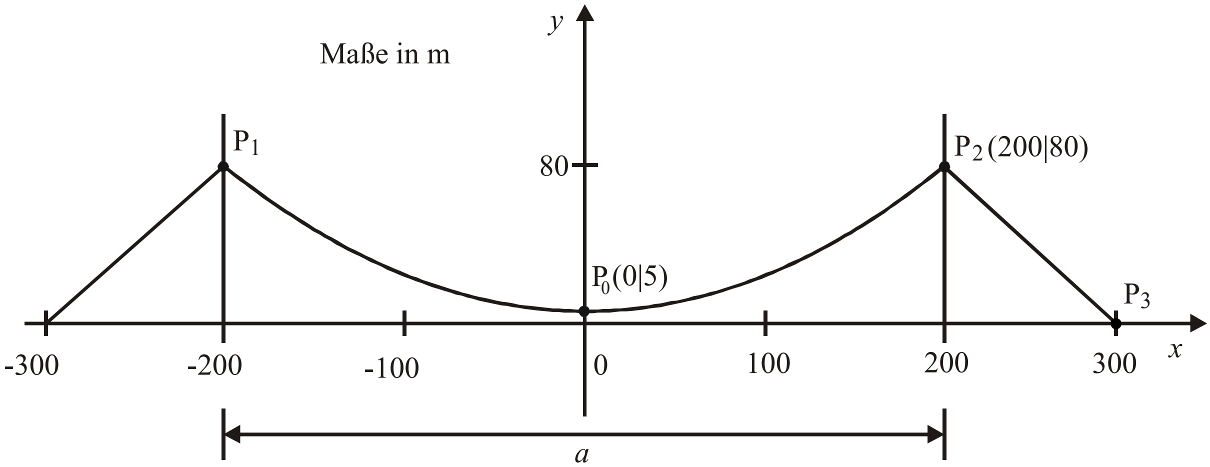


T_1 :Treffer beim ersten Freiwurf
$\cancel{T}_1$:kein Treffer beim ersten Freiwurf
T_2 :Treffer beim zweiten Freiwurf
$\cancel{T}_2$:kein Treffer beim zweiten Freiwurf

Prüfungsteil 2: Aufgabe 4

Das Foto oben zeigt eine Hängebrücke. Die Stahlseile sind in einer Höhe von 80 m über der Straße an den Brückenpfeilern befestigt.

Der Verlauf des Stahlseils zwischen den Brückenpfeilern kann annähernd durch eine Parabel beschrieben werden.



a) Wie hoch hängt das Stahlseil zwischen den Brückenpfeilern an seiner tiefsten Stelle (P_0) über der Fahrbahn? Notiere den Wert in deinen Unterlagen.

b) Wie viele Meter beträgt der Abstand *a* der beiden Brückenpfeiler?

c) Der Punkt P_2 hat die Koordinaten P_2 (200|80). Bestimme die Koordinaten von P_1.

d) Eine der folgenden Funktionsgleichungen gehört zu der Parabel, die den Verlauf des Stahlseils beschreibt.

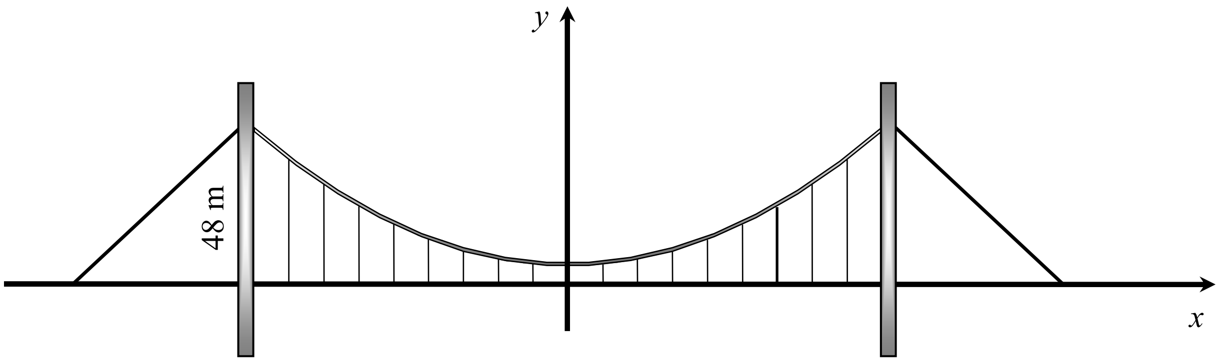
A	B	C
$y = -0{,}001875 \cdot x^2 + 5$	$y = 0{,}001875 \cdot x^2 + 5$	$y = 0{,}001875 \cdot x^2 - 5$

d1) Notiere den zugehörigen Lösungsbuchstaben in deinen Unterlagen.

d2) Erkläre, warum die beiden anderen Funktionsgleichungen die Parabel nicht beschreiben.

e) Berechne die Länge der Strecke $\overline{P_2P_3}$. Notiere deine Rechnung.

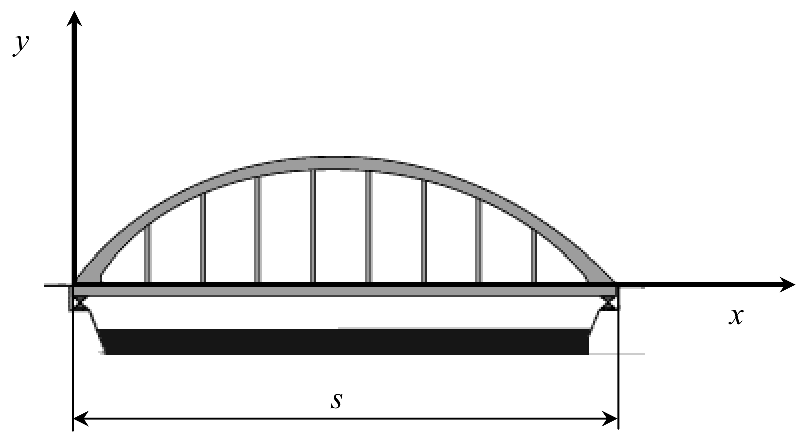
Die folgende Abbildung zeigt eine andere Hängebrücke. Die Stahlseile sind in einer Höhe von 48 m über der Straße an den Brückenpfeilern befestigt.



Das Stahlseil zwischen den Brückenpfeilern hat annähernd die Form einer Parabel.
Die Funktionsgleichung dieser Parabel lautet $y = 0{,}002 \cdot x^2 + 3$ (x und y in Metern).

f) Berechne mit Hilfe der Funktionsgleichung den Abstand zwischen den Brückenpfeilern. Notiere deine Rechnung.

Eine Bogenbrücke (vgl. Abbildung unten) hat annähernd die Form einer Parabel mit zugehöriger Funktionsgleichung $y = -0{,}007 \cdot x^2 + 1{,}3 \cdot x$ (x und y in Metern).



g) Bestimme die Spannweite s. Notiere deine Rechnung.

Prüfungsteil 1: Aufgabe 1

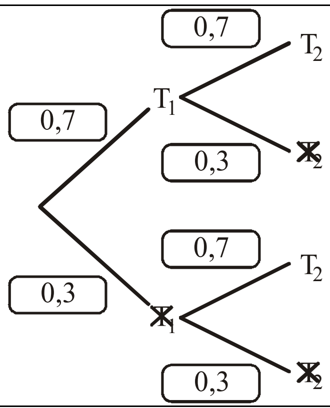
	Kriterien: Der Prüfling …	**Lösung:**	**Punkte:**
a)	kreuzt den richtigen Maßstab an	1 : 100	2
b)	kreuzt jeweils die richtige Antwort an	b_1) ☒ ja ☐ nein b_2) ☐ ja ☒ nein b_3) ☐ ja ☒ nein	1 1 1
c)	wählt ein Verfahren zur Berechnung des Volumens des Werkstücks berechnet das Volumen	z. B.: unterteilt die Vorderfläche in Rechtecke, deren Flächeninhalte berechnet werden: 4 cm · 4 cm + 10 cm · 5 cm = 66 cm² V = 66 cm² · 6 cm = 396 cm³	1 1 1
	wählt einen anderen Lösungsweg, der sachlich richtig ist		max. 3
d)	gibt ein mögliches, sinnvolles Wertepaar an	z. B.: x = 33 cm, y = 15 cm Werte zwischen 10 cm und 20 cm werden für die Treppenhöhe (y) als sinnvoll betrachtet.	2
e1)	entnimmt die relevanten Daten berechnet die Entfernung	17 Sekunden; 3,3 Sekunden pro km z. B.: 17 : 3,3 ≈ 5,15… „Das Gewitter ist 5,2 km entfernt."	1 1
e2)	entnimmt die relevanten Informationen aus dem Text berechnet die Zeit	8 km; 3,3 Sekunden pro km 8 · 3,3 = 26,4 „Der Donner braucht ca. 26 Sekunden."	1 1
f1)	entnimmt die relevanten Daten aus dem Text und dem Diagramm berechnet die absolute Häufigkeit des Wurfergebnisses „4"	abgelesen: 200 Würfe; relative Häufigkeit: 0,265 200 · 0,265 = 53 Unter 200 Würfen waren 53 „4en".	1 2
f2)	entnimmt dem Diagramm die relevanten Daten	„Der Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit der „4" liegt bei 0,25." (Akzeptiert werden Werte zwischen 0,245 und 0,255.)	2
			Punkte Aufgabe 1: 19 Punkte

Prüfungsteil 2: Aufgabe 2

	Kriterien: Der Prüfling …	**Lösung:**	**Punkte:**
a)	entnimmt dem Text und der Zeichnung die relevanten Daten wählt einen geeigneten Lösungsweg zur Berechnung der Fläche berechnet die Fläche	r = 225 m $A = \pi \cdot r^2$ $A = \pi \cdot (225\text{m})^2 = 159\,043{,}1\ldots\ \text{m}^2$ $\approx 159\,043\ \text{m}^2$	1 1 1

b)	entnimmt die relevanten Daten berechnet die Geschwindigkeit gibt die Geschwindigkeit in km/h an	$r = 225$ m z. B.: $u = 2 \cdot \pi \cdot r$ $u = 2 \cdot \pi \cdot 225$ m $u = 1413,7\ldots$ m $3u = 4241,1\ldots$ m $v \approx 4,24$ km/h	1 1 1 1
	wählt einen anderen Lösungsweg, der sachlich richtig ist		max. 4
c)	beschreibt einen Lösungsweg in sprachlicher oder formalisierter Form	z. B.: „Die nicht bewässerte Fläche besteht aus 6 Quadratflächen der Kantenlänge 450 m, von denen die 6 Kreisflächen abgezogen werden.“	3
	wählt einen anderen Lösungsweg, der sachlich richtig ist		max. 3
d)	bestimmt die Länge eines kurzen Rohres und entnimmt relevante Daten für die längeren Rohre aus Text und Zeichnung berechnet die Rohrlänge mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnet die Gesamtlänge der Wasserrohre	Länge: 225 m z. B.: Katheten der Länge 225 m und 450 m $225^2 + 450^2 = 253\,125$ Länge eines Rohres: ca. 503 m $2 \cdot 225 \text{ m} + 4 \cdot 503 \text{ m} = 2\,462$ m	1 3 1
	wählt einen anderen Lösungsweg, der sachlich richtig ist		max. 5
			Punkte Aufgabe 2: 15 Punkte

Prüfungsteil 2: Aufgabe 3

	Kriterien: Der Prüfling …	**Lösung:**	**Punkte:**
a)	notiert nur den richtigen Lösungsbuchstaben	B	1
b)	notiert nur den richtigen Lösungsbuchstaben	C	1
c)	kreuzt *stimmt* bzw. *stimmt nicht* jeweils richtig an	A: stimmt B: stimmt C: stimmt nicht D: stimmt nicht	1 1 1 1
d1)	ergänzt die Wahrscheinlichkeiten		2

d2)	entnimmt die relevanten Daten aus dem Text und der Tabelle	Erfolgswahrscheinlichkeit: 0,7 Ereignisse: T_1 und T_2	1
	wählt ein geeignetes Verfahren zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit	$P(T_1$ und $T_2) = 0{,}7 \cdot 0{,}7$	1
	berechnet die Wahrscheinlichkeit	$P(T_1$ und $T_2) = 0{,}49$	1
	wählt einen anderen Lösungsweg, der sachlich richtig ist		max. 3
d3)	entnimmt die relevanten Daten aus dem Text und der Tabelle	Erfolgswahrscheinlichkeit: 0,7 (T_1 und $\cancel{T_2}$) oder ($\cancel{T_1}$ und T_2)	1
	wählt ein geeignetes Verfahren zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit	$P(T_1$ und $\cancel{T_2}) + P(\cancel{T_1}$ und $T_2)$ $= 0{,}7 \cdot 0{,}3 + 0{,}3 \cdot 0{,}7$	1
	berechnet die Wahrscheinlichkeit	$= 0{,}42$	1
	wählt einen anderen Lösungsweg, der sachlich richtig ist		max. 3
			Punkte Aufgabe 3: 14 Punkte

Prüfungsteil 2: Aufgabe 4

	Kriterien: Der Prüfling …	**Lösung:**	**Punkte:**
a)	entnimmt der Abbildung die relevanten Daten	5 m	1
b)	bestimmt den Abstand *a* zwischen den beiden Brückenpfeilern	400 m	1
c)	notiert die Koordinaten des Punktes P_1	$P_1(-200\|80)$	1
d1)	notiert nur den richtigen Lösungsbuchstaben	B	1
d2)	nutzt mathematische Kenntnisse aus dem Bereich der quadratischen Funktionen für eine Begründung	z. B.: „Die Parabel, die durch die Gleichung $-0{,}001875 \cdot x^2 + 5$ beschrieben wird, ist nach unten geöffnet. Der Scheitelpunkt der Funktion $0{,}001875 \cdot x^2 - 5$ liegt unterhalb der *x*-Achse.“	2
	wählt einen anderen Lösungsweg, der sachlich richtig ist		max. 2
e)	entnimmt die relevanten Daten aus der Abbildung	rechtwinkliges Dreieck mit den Kathetenlängen 80 m und 100 m	1
	wendet den Satz von Pythagoras zur Berechnung Länge der Strecke $\overline{P_2P_3}$ an	z. B. $\left(\overline{P_2P_3}\right)^2 = (80\text{m})^2 + (100\text{m})^2$	2
	berechnet die Länge der Strecke $\overline{P_2P_3}$	$\overline{P_2P_3} = \sqrt{16400\ \text{m}^2} \approx 128{,}06\,\text{m}$	1
	wählt einen anderen Lösungsweg, der sachlich richtig ist		max. 4

f)	entnimmt dem Text und der Abbildung die relevanten Daten	z. B.: Koordinaten: P (x|48) Funktionsgleichung: $y = 0{,}002 \cdot x^2 + 3$	1
	stellt eine Gleichung zur Bestimmung der Punkte auf	$48 = 0{,}002 \cdot x^2 + 3$	1
	löst die quadratische Gleichung	$x_{1/2} = \pm 150$	1
	berechnet den Abstand	300 m	1
	wählt einen anderen Lösungsweg, der sachlich richtig ist		max. 4
g)	entnimmt dem Text und der Abbildung die relevanten Daten	z. B.: s ist Nullstelle Funktionsgleichung: $y = -0{,}007 \cdot x^2 + 1{,}3 \cdot x$	1
	stellt die zur Bestimmung der Spannweite notwendige quadratische Gleichung auf	Berechnung der Nullstellen $0 = -0{,}007 \cdot (x^2 - (1{,}3 : 0{,}007) \cdot x)$	1
	löst die quadratische Gleichung	$x_1 = 0$; $x_2 \approx 185{,}7$	1
	bestimmt die Spannweite s	$s = 185{,}7$ m	1
	wählt einen anderen Lösungsweg, der sachlich richtig ist		max. 4
			Punkte Aufgabe 4: 18 Punkte

Übersicht über die Punkteverteilung

Prüfungsteil 1: Aufgabe 1	19
Prüfungsteil 2: Aufgabe 2	15
Prüfungsteil 2: Aufgabe 3	14
Prüfungsteil 2: Aufgabe 4	18
Umgang mit Maßeinheiten	3
Darstellungsleistung	6
Gesamt	75

Notentabelle

Note	**Punkte**
sehr gut	65 – 75
gut	55 – 64
befriedigend	44 – 54
ausreichend	34 – 43
mangelhaft	14 – 33
ungenügend	0 – 13

Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit im Fach Mathematik
(Realschule)

Name: ______________________________ Klasse: __________

Schule: ______________________________

Prüfungsteil 1: Aufgabe 1

	Anforderung	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK[1] Punktzahl	ZK[1] Punktzahl	DK[1] Punktzahl
a)	kreuzt den richtigen Maßstab an	2			
b1)	ja	1			
b2)	nein	1			
b3)	nein	1			
c)	wählt ein Verfahren …	1			
	… zur Berechnung des Volumens …	1			
	berechnet das Volumen	1			
	wählt einen anderen Lösungsweg, …	(3)			
d)	gibt ein mögliches, sinnvolles Wertepaar an	2			
e1)	entnimmt die relevanten Daten	1			
	berechnet die Entfernung	1			
e2)	entnimmt die relevanten Informationen …	1			
	berechnet die Zeit	1			
f1)	entnimmt die relevanten Daten …	1			
	berechnet die absolute Häufigkeit …	2			
f2)	entnimmt dem Diagramm die … Daten	2			
	Summe	**19**			

Prüfungsteil 2: Aufgabe 2

	Anforderung	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK Punktzahl	ZK Punktzahl	DK Punktzahl
a)	entnimmt dem Text und …	1			
	wählt einen geeigneten Lösungsweg …	1			
	berechnet die Fläche	1			

[1] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur2

b)	entnimmt die relevanten Daten	1			
	berechnet die Geschwindigkeit (Formel)	1			
	berechnet die Geschwindigkeit (Wert)	1			
	gibt die Geschwindigkeit in km/h an	1			
	wählt einen anderen Lösungsweg, …	(4)			
c)	beschreibt einen Lösungsweg …	3			
	wählt einen anderen Lösungsweg, …	(3)			
d)	bestimmt die Länge eines kurzen Rohres …	1			
	berechnet die Rohrlänge …	3			
	berechnet die Gesamtlänge der Wasserrohre	1			
	wählt einen anderen Lösungsweg, …	(5)			
	Summe	**15**			

Prüfungsteil 2: Aufgabe 3

	Anforderung	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK Punktzahl	ZK Punktzahl	DK Punktzahl
a)	notiert nur den richtigen Lösungsbuchstaben	1			
b)	notiert nur den richtigen Lösungsbuchstaben	1			
c)	stimmt	1			
	stimmt	1			
	stimmt nicht	1			
	stimmt nicht	1			
d1)	ergänzt die Wahrscheinlichkeiten	2			
d2)	entnimmt die relevanten Daten …	1			
	wählt ein geeignetes Verfahren …	1			
	berechnet die Wahrscheinlichkeit	1			
	wählt einen anderen Lösungsweg, …	(3)			
d3)	entnimmt die relevanten Daten …	1			
	wählt ein geeignetes Verfahren …	1			
	berechnet die Wahrscheinlichkeit	1			
	wählt einen anderen Lösungsweg, …	(3)			
	Summe	**14**			

Prüfungsteil 2: Aufgabe 4

	Anforderung	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK Punktzahl	ZK Punktzahl	DK Punktzahl
a)	entnimmt der Abbildung …	1			
b)	bestimmt den Abstand *a* …	1			

c)	notiert die Koordinaten des Punktes P_1	**1**			
d1)	notiert den richtigen Lösungsbuchstaben	**1**			
d2)	nutzt mathematische Kenntnisse …	**2**			
	wählt einen anderen Lösungsweg, …	**(2)**			
e)	entnimmt die relevanten Daten …	**1**			
	wendet den Satz von Pythagoras …	**2**			
	berechnet die Länge der Strecke …	**1**			
	wählt einen anderen Lösungsweg, …	**(4)**			
f)	entnimmt dem Text und der Abbildung die …	**1**			
	stellt eine Gleichung zur Bestimmung …	**1**			
	löst die quadratische Gleichung	**1**			
	berechnet den Abstand	**1**			
	wählt einen anderen Lösungsweg, …	**(4)**			
g)	entnimmt dem Text und der Abbildung die …	**1**			
	stellt die … quadratische Gleichung auf	**1**			
	löst die quadratische Gleichung	**1**			
	bestimmt die Spannweite *s*	**1**			
	wählt einen anderen Lösungsweg, …	**(4)**			
	Summe	**18**			

		maximal erreichbare Punktzahl	EK Punktzahl	ZK Punktzahl	DK Punktzahl
	Umgang mit Maßeinheiten	**3**			
	Darstellungsleistung	**6**			

Festsetzung der Note

	maximal erreichbare Punktzahl	EK Punktzahl	ZK Punktzahl	DK Punktzahl
Aufgabe 1	**19**			
Aufgabe 2	**15**			
Aufgabe 3	**14**			
Aufgabe 4	**18**			
Umgang mit Maßeinheiten	**3**			
Darstellungsleistung	**6**			
Gesamtpunktzahl	**75**			
Paraphe				

Die Prüfungsarbeit wird mit der Note ______________________________ bewertet.

Unterschriften, Datum:

D-3 Die „MSA-Gy-Prüfung“ für Gymnasium

D-3.1 Die Vorgaben des Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen

D-3.2 Die Aufgaben

D-3.3 Die Auswertungsanleitungen des Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen

Zentrale Prüfungen am Ende der Klasse 10 an Gymnasien

Unterrichtliche Voraussetzungen für die schriftlichen Prüfungen im Jahr 2008

Vorgaben für das Fach Mathematik

1 Hinweise zur Konzeption und Vorbereitung der schriftlichen Prüfung

1.1 Struktur der schriftlichen Prüfung

Die schriftliche Prüfung besteht aus zwei Teilen:

Im ersten Teil werden Basiskompetenzen (vgl. Abschnitt 2.1) in einzelnen, nicht aufeinander bezogenen Teilaufgaben überprüft. Diese Teilaufgaben orientieren sich an den Aufgabenformaten der Lernstandserhebungen.

Im zweiten Teil werden komplexere Aufgaben mit jeweils mehreren Teilaufgaben zu einem Kontext gestellt. Mit diesen Aufgaben werden (vgl. Abschnitt 2.2) insgesamt Kompetenzen aus allen vier Prozessbereichen (*Argumentieren/Kommunizieren*, *Problemlösen*, *Modellieren*, *Werkzeuge*) und allen vier Inhaltsbereichen (*Arithmetik/Algebra*, *Funktionen*, *Geometrie*, *Stochastik*) überprüft. Die Aufgaben beziehen sich auf den Unterricht in den Jahrgangsstufen 9 und 10. Für ihre Bearbeitung können aber auch Kompetenzen erforderlich sein, welche die Schülerinnen und Schüler in den zurückliegenden Schuljahren erworben haben.

Bei der Auswertung der Aufgaben wird der Umgang mit Maßeinheiten sowie die Nachvollziehbarkeit, formale Angemessenheit und Genauigkeit der Darstellung von Lösungen gesondert berücksichtigt.

1.2 Vorbereitende Klassenarbeit

Die Schülerinnen und Schüler sollen auf die konkreten Bedingungen vorbereitet sein. Daher wird den Schulen empfohlen, in der Jahrgangsstufe 10 eine der regulären Klassenarbeiten unter den Bedingungen der zentralen Prüfung (z. B. Aufgabenformate des zweiten Prüfungsteils mit entsprechendem Bewertungsverfahren) zu schreiben.

1.3 Hilfsmittel

Die Schülerinnen und Schüler sollen im Umgang mit den folgenden in der schriftlichen Prüfung zugelassenen Hilfsmitteln vertraut sein:

- Zirkel und Geodreieck,
- Formelsammlung[1],
- Wissenschaftlicher Taschenrechner[2].

[1] Pauschal zugelassen sind handelsübliche Formelsammlungen ohne Ergänzungen. Im Internetangebot „Prüfungen 10" (http://www.learn-line.nrw.de/angebote/pruefungen10/) wird eine Formelsammlung zum Download angeboten.

[2] Zugelassen sind alle für die Schule üblichen elektronischen Rechenhilfsmittel. Genauere Bestimmungen können den separaten Erläuterungen „wissenschaftlicher Taschenrechner" (http://www.learn-line.nrw.de/angebote/pruefungen10/download/Elektronische_Rechenhilfsmittel.pdf) entnommen werden.

2 Unterrichtliche Schwerpunkte für die Vorbereitung auf die schriftliche Prüfung im Jahr 2008

Grundlage für die zentral gestellten Aufgaben der schriftlichen Prüfung sind die Vorgaben des Kernlehrplans (gem. RdErl. d. Ministeriums für Schule, Jugend und Kinder v. 27.9.2004). Mit den Kompetenzerwartungen des Kernlehrplans sind nicht immer Festlegungen auf relevante Inhalte verbunden. Um allen Schülerinnen und Schülern vergleichbare Lerngelegenheiten bieten zu können, sind also zusätzlich konkretisierende Vorgaben für den Unterricht erforderlich.

Die Verpflichtung zur Beachtung der gesamten Obligatorik des Kernlehrplans – vor allem Kapitel 2 „Anforderungen am Ende der Sekundarstufe I" und Kapitel 3.3 „Kompetenzerwartungen am Ende der Jahrgangsstufe 10" – bleibt von den folgenden Schwerpunktsetzungen unberührt. Die Realisierung dieser Obligatorik liegt in der Verantwortung der Schule. Zur Vorbereitung auf die schriftliche Prüfung sind außerdem die in Kapitel 4 des Kernlehrplans aufgeführten Aufgaben zu beachten, die die fachlichen Standards und Kompetenzerwartungen veranschaulichen und konkretisieren.

Die folgenden Schwerpunktsetzungen gelten für die Vorbereitung auf die zentrale Prüfung im Jahr 2008.

2.1 Schwerpunktsetzungen für den ersten Teil der schriftlichen Prüfung

Alle Schülerinnen und Schüler sollen in solchen Kompetenzen gefördert werden, die für einen angemessenen Umgang mit Zahlen und Größen im Alltag sowie für das vertiefte Anwenden und Betreiben von Mathematik eine besondere Rolle spielen (Basiskompetenzen). Im Jahr 2008 werden folgende aus der Breite der Kompetenzbereiche ausgewählte Basiskompetenzen überprüft:

- Schätzen und Runden (siehe z. B. Aufgabe Schnur LSE 2005, Aufgabe Schulbus LSE 2004, Beispielarbeit Prüfungen 10: Aufgabe 1a) und 1e)),
- die Bestimmung von Flächen und Volumina bei einfachen Figuren und Körpern (Dreiecke, Vierecke, Kreise, Quader und Zylinder sowie daraus zusammengesetzte Figuren bzw. Körper; siehe z. B. Aufgabe Flächeninhalte LSE 2005, Beispielarbeit Prüfungen 10: Aufgabe 1c) und d)),
- das Erkennen einfacher proportionaler und antiproportionaler Zuordnungen (siehe z. B. Aufgabe Brötchen LSE 2004, Beispielarbeit Prüfungen 10: Aufgabe 1b)),
- die Entnahme mathematischer Informationen aus einfachen Texten, Grafiken und Diagrammen (siehe z. B. Aufgabe Fahrradtour LSE 2005, Beispielarbeit Prüfungen 10: Aufgabe 1f)),
- die Bestimmung von elementaren Wahrscheinlichkeiten (siehe z. B. Aufgabe Glücksrad LSE 2004),
- der Umgang mit Variablen, Termen und Gleichungen (siehe z. B. Aufgabe Kino LSE 2005).

2.2 Thematisch-inhaltliche Schwerpunkte für den zweiten Teil der schriftlichen Prüfung

Da angemessene Lernsituationen im Mathematikunterricht immer inhalts- und prozessbezogene Kompetenzen zugleich fördern, werden die gemeinsamen Lerngelegenheiten, die allen Schülerinnen und Schüler ermöglicht werden sollen, in der folgenden „Kompetenzmatrix“ verortet. Die empfohlenen gemeinsamen Lerngelegenheiten skizzieren Themen und Inhalte, durch deren Bearbeitung alle Schülerinnen und Schüler auf Anforderungen der schriftlichen Prüfung vorbereitet werden können.

	Arithmetik / Algebra	Funktionen	Geometrie	Stochastik
Argumentieren / Kommunizieren	Erläuterung mathematischer Zusammenhänge mit eigenen Worten und geeigneten Fachbegriffen beim Umgang mit linearen oder quadratischen Gleichungen	- Analyse und Bewertung funktionaler Zusammenhänge in authentischen Texten (z. B. Zeitungstexte oder Gebrauchsanweisungen) - Interpretation von grafischen Darstellungen funktionaler Zusammenhänge		Analyse von grafischen Darstellungen statistischer Daten und deren Manipulation (z. B. aus Zeitungsartikeln)
Problemlösen	Nutzung der Kenntnisse über Zahlen und Zahlbereiche zum Lösen mathematischer Probleme		Bestimmung unbekannter Größen durch Zerlegen von Figuren, mit Hilfe des Satzes von Pythagoras oder mit Hilfe von Ähnlichkeitsbeziehungen	
Modellieren		Erstellung, Nutzung und Interpretation von Modellen aus den Bereichen: - Tarife - Weg-Zeit-Zusammenhänge - Wachstumsprozesse (linear oder exponentiell) - Prozent-, Zins- und Zinseszinsrechnung (z. B. Preisreduktion, Spar- und Kreditmodelle)	Erstellung, Nutzung und Interpretation von Modellen aus den Bereichen: - Architektur (z. B. Formen von Gebäuden) - Verpackungen	Nutzung von Baumdiagrammen oder Vierfeldertafeln zur Beurteilung von Chancen und Risiken
Werkzeuge	Verwendung des Taschenrechners (z. B. kritische Reflexion von Ergebnissen)		Nutzung verfügbarer Werkzeuge zur Bearbeitung geometrischer Situationen (z. B. Nutzung von Zirkel und Geodreieck)	

3 Beispielarbeiten

Diese unterrichtlichen Vorgaben werden durch Beispielarbeiten und veröffentlichte Prüfungsarbeiten konkretisiert, denen die schulformspezifischen und bildungsgangbezogenen Ausformungen der Kompetenzen zugrunde liegen. Dadurch wird u. a. das Anforderungsniveau der schriftlichen Prüfung veranschaulicht.

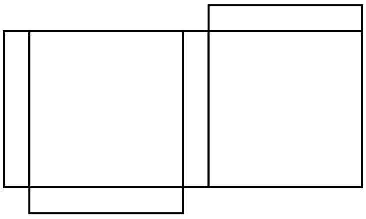
Prüfungsteil 1: Aufgabe 1

a) In welchem Maßstab müsste das abgebildete Modellauto vergrößert werden, damit es ungefähr so groß wäre wie das Original? Kreuze an!

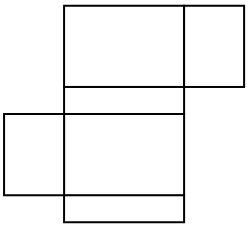
□ 1 : 10 □ 1 : 100 □ 1 : 1 000 □ 1 : 10 000

---

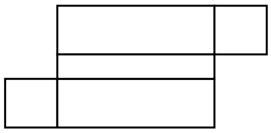
b) Kann man aus dem jeweiligen Netz einen geschlossenen Quader bauen? Kreuze an!



b_1) □ ja □ nein



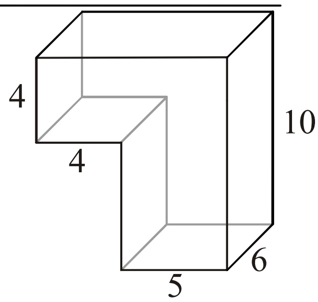
b_2) □ ja □ nein



b_3) □ ja □ nein

---

c) Berechne das Volumen des Werkstücks. Die Maße in der Zeichnung sind in cm angegeben. Notiere deine Rechnung.

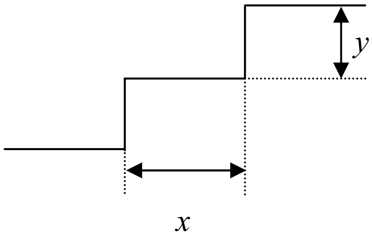


---

d) Für den Bau von Treppen verwendet man häufig die folgende „Schrittmaßregel“ (siehe Skizze):

$$x + 2\,y = 63\text{ cm}$$

Gib ein Wertepaar für x und y an, das die Gleichung erfüllt und für den Bau einer Treppe sinnvoll ist.



---

e) Blitz und Donner entstehen zur gleichen Zeit am gleichen Ort. Der Schall legt einen Kilometer in 3,3 Sekunden zurück. Das Licht ist so schnell, dass man es auch in großer Entfernung nahezu im Moment des Blitzes sieht.

e1) Wie weit ist ein Gewitter entfernt, wenn es 17 Sekunden nach dem Blitz donnert? Notiere deine Rechnung.

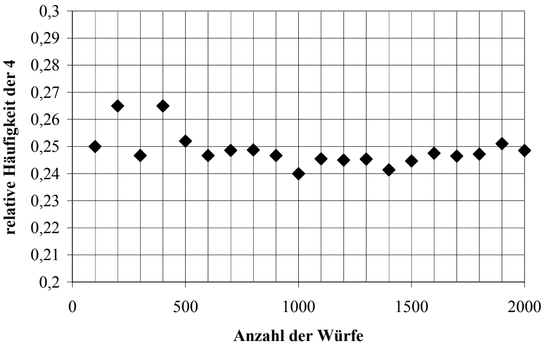
e2) Wie lange dauert es, bis es donnert, wenn der Blitz 8 km entfernt entsteht? Notiere deine Rechnung.

---

f) Ein mit den Zahlen „1“ bis „6“ beschrifteter Quader wurde insgesamt 2 000-mal geworfen. Das Diagramm zeigt die relative Häufigkeit des Wurfergebnisses „4“ nach 100, 200, 300, 400 usw. Würfen.

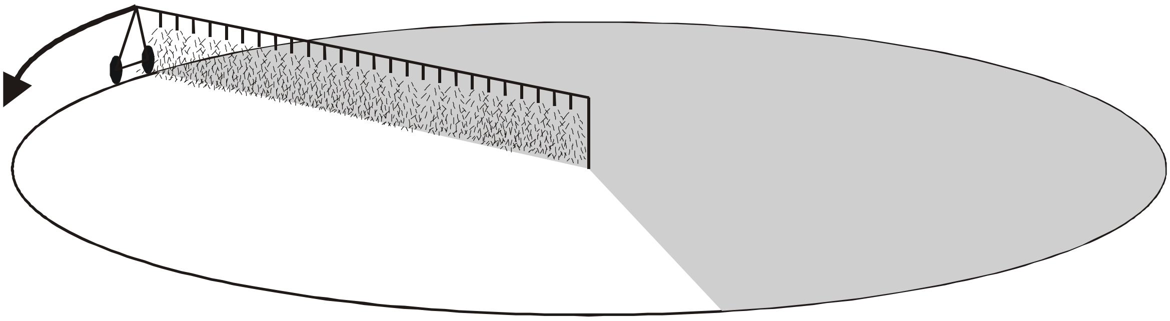
f1) Wie oft ist die „4“ bei 200 Würfen gefallen? Notiere deine Rechnung.

f2) Gib mit Hilfe des Diagramms einen Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit an, dass bei dem benutzten Quader eine „4“ fällt.



Prüfungsteil 2: Aufgabe 2

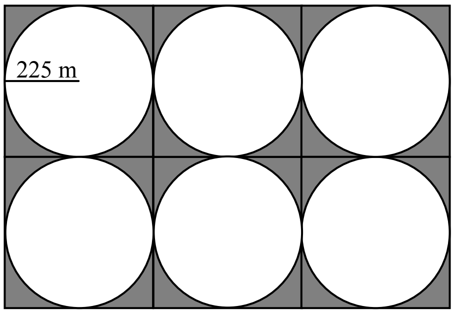
Auf vielen Getreidefeldern in den USA werden wegen der Trockenheit im Sommer Bewässerungsanlagen eingesetzt. Sie sind im Mittelpunkt fest montiert und lange „Arme“ mit Wasserrohren fahren auf großen Rädern kreisförmig über die Felder (siehe Abbildung).



Farmer Jackson setzt Anlagen ein, die jeweils eine Armlänge von 225 m haben.

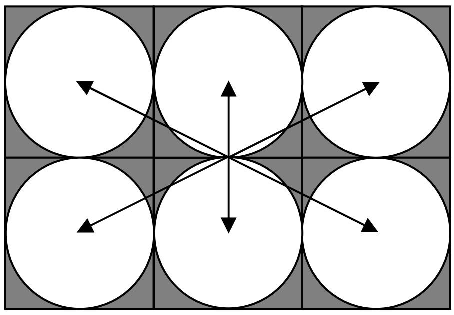
a) Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich der äußere Endpunkt eines solchen Wasserrohres, wenn die Anlage drei Umdrehungen in einer Stunde macht? Gib die Geschwindigkeit in km/h an. Notiere deine Rechnung.

Aus dem Flugzeug sieht Jacksons Getreidefeld aus wie auf der Skizze rechts: Die bewässerten Kreisflächen sehen grün (hier: weiß) aus, das andere Gelände ist braun (hier: grau).



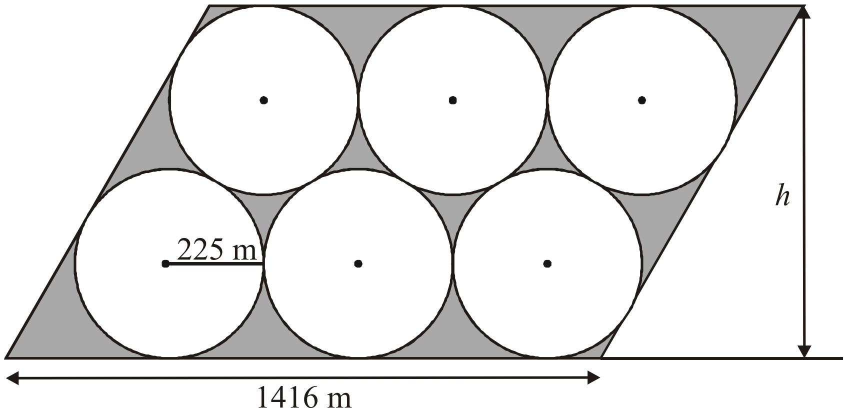
b) Die Fläche, die nicht bewässert wird, soll berechnet werden. Beschreibe einen möglichen Lösungsweg, ohne zu rechnen.

Farmer Jackson muss seine Wasserleitungen erneuern, die von einem Brunnen in der Mitte des Geländes zu den Mittelpunkten aller Kreisflächen führen (siehe Pfeile).



c) Berechne die Gesamtlänge aller Wasserleitungen. Notiere deine Rechnung.

d) Auf einer anderen Farm sind die Bewässerungsanlagen anders angeordnet:



d1) Berechne den prozentualen Anteil der nicht bewässerten Fläche (hier grau dargestellt). Nimm dabei an, dass h = 840 m ist.

d2) Weise nun nach, dass h tatsächlich ungefähr 840 m ist. Notiere deine Rechnung.

Ministerium für
Schule und Weiterbildung
des Landes Nordrhein-Westfalen

Prüfungsarbeit Mathematik
Gymnasium

prüfungen.10

Prüfungsteil 2: Aufgabe 3

In Untersuchungen mit Sportlern wurden Schätzwerte für Fehlerwahrscheinlichkeiten in unterschiedlichen Situationen ermittelt. Ziel war es, mögliche Fehler durch zielgerichtetes Training weitgehend auszuschließen.

a) Schwierige Aufgaben unter Stress werden von Sportlern mit einer Fehlerwahrscheinlichkeit von 0,3 ausgeführt. Beurteile, ob die folgenden Aussagen stimmen. Kreuze an.

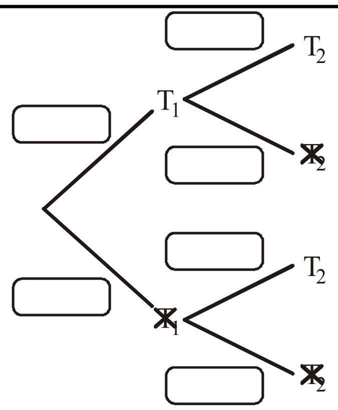
Das bedeutet, dass	stimmt	stimmt nicht
es in **etwa** 30 % der Fälle zu einem Fehler kommt.		
die Fehlerwahrscheinlichkeit $3 \cdot 10^{-1}$ beträgt.		
30 Fehler gemacht werden.		
in 3 von 10 Fällen **sicher** ein Fehler auftritt.		

b) In einem Spiel erhält ein Spieler zwei Freiwürfe. Seine Trefferwahrscheinlichkeit bei jedem Freiwurf in diesem Spiel beträgt stressbedingt nur noch 70 %.

b1) Trage in die Kästchen die Wahrscheinlichkeiten für die Äste ein.

b2) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Spieler bei beiden Freiwürfen trifft? Notiere deine Rechnung.

b3) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird er nur einmal treffen? Notiere deine Rechnung.



T_1 :Treffer beim ersten Freiwurf
$\cancel{T}_1$:kein Treffer beim ersten Freiwurf
T_2 :Treffer beim zweiten Freiwurf
$\cancel{T}_2$:kein Treffer beim zweiten Freiwurf

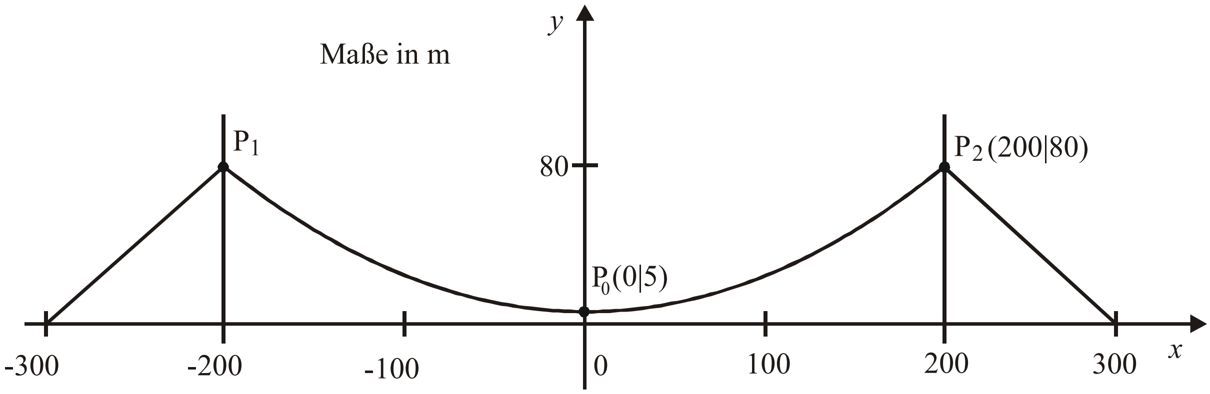
c) Um die Technik der Spieler weiter zu verbessern, werden die Würfe mit Hilfe eines Videogerätes aufgezeichnet. Hier siehst du eine sogenannte Stroboskopaufnahme, bei welcher der Ball an verschiedenen Positionen in der Luft gezeigt wird.

Flugbahnen von Bällen können näherungsweise durch quadratische Funktionen beschrieben werden. Aus dem Bild kann bestimmt werden, ob der Ball in den Korb treffen kann oder nicht. Beschreibe – ohne zu rechnen – ein mögliches Vorgehen, mit dem das untersucht werden kann. Nenne auch die dazu notwendigen mathematischen Methoden.

Prüfungsteil 2: Aufgabe 4

Das Foto oben zeigt eine Hängebrücke. Die Stahlseile sind in einer Höhe von 80 m über der Straße an den Brückenpfeilern befestigt.

Der Verlauf des Stahlseils zwischen den Brückenpfeilern kann annähernd durch eine Parabel beschrieben werden.



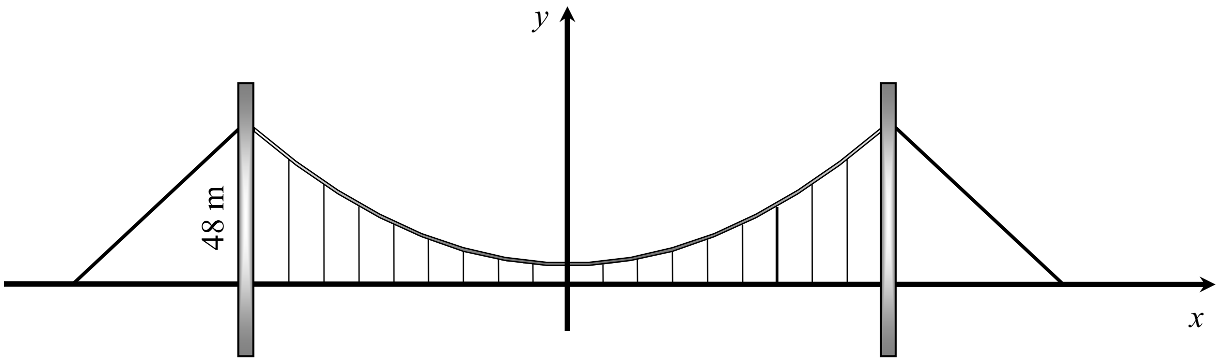
a) Eine der folgenden Funktionsgleichungen gehört zu der Parabel, die den Verlauf des Stahlseils beschreibt.

A	B	C
$y = -\,0{,}001875 \cdot x^2 + 5$	$y = 0{,}001875 \cdot x^2 + 5$	$y = 0{,}001875 \cdot x^2 - 5$

a1) Notiere den zugehörigen Lösungsbuchstaben in deinen Unterlagen.

a2) Erkläre, warum die beiden anderen Funktionsgleichungen die Parabel nicht beschreiben.

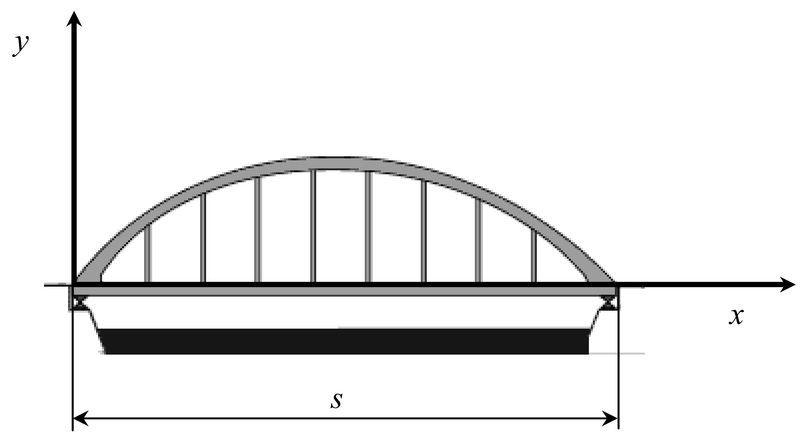
Die folgende Abbildung zeigt eine andere Hängebrücke. Die Stahlseile sind in einer Höhe von 48 m über der Straße an den Brückenpfeilern befestigt.



Das Stahlseil zwischen den Brückenpfeilern hat annähernd die Form einer Parabel.
Die Funktionsgleichung dieser Parabel lautet $y = 0{,}002 \cdot x^2 + 3$ (x und y in Metern).

b) Berechne mit Hilfe der Funktionsgleichung den Abstand zwischen den Brückenpfeilern. Notiere deine Rechnung.

Eine Bogenbrücke (vgl. Abbildung unten) hat annähernd die Form einer Parabel mit zugehöriger Funktionsgleichung $y = -\,0{,}007 \cdot x^2 + 1{,}3 \cdot x$ (x und y in Metern).

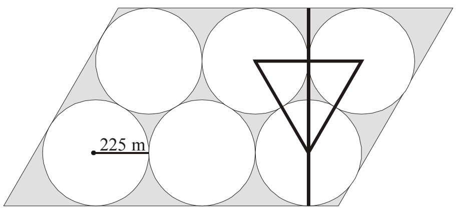


c) Bestimme die Spannweite s. Notiere deine Rechnung.

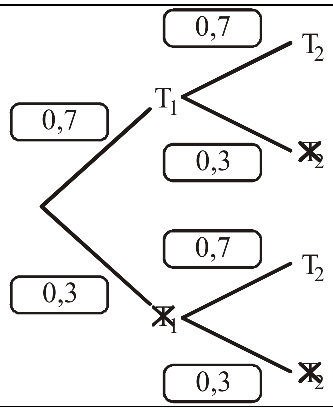
Prüfungsteil 1: Aufgabe 1

	Kriterien: Der Prüfling …	**Lösung:**	**Punkte:**
a)	kreuzt den richtigen Maßstab an	1 : 100	2
b)	kreuzt jeweils die richtige Antwort an	b_1) ☒ ja ☐ nein b_2) ☐ ja ☒ nein b_3) ☐ ja ☒ nein	1 1 1
c)	wählt ein Verfahren zur Berechnung des Volumens des Werkstücks berechnet das Volumen	z. B.: unterteilt die Vorderfläche in Rechtecke, deren Flächeninhalte berechnet werden: $4\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} + 10\text{ cm} \cdot 5\text{ cm} = 66\text{ cm}^2$ $V = 66\text{ cm}^2 \cdot 6\text{ cm} = 396\text{ cm}^3$	1 1 1
	wählt einen anderen Lösungsweg, der sachlich richtig ist		max. 3
d)	gibt ein mögliches, sinnvolles Wertepaar an	z. B.: $x = 33$ cm, $y = 15$ cm Werte zwischen 10 cm und 20 cm werden für die Treppenhöhe (y) als sinnvoll betrachtet.	2
e1)	entnimmt die relevanten Daten berechnet die Entfernung	17 Sekunden; 3,3 Sekunden pro km z. B.: $17 : 3{,}3 \approx 5{,}15\ldots$ „Das Gewitter ist 5,2 km entfernt."	1 1
e2)	entnimmt die relevanten Informationen aus dem Text berechnet die Zeit	8 km; 3,3 Sekunden pro km $8 \cdot 3{,}3 = 26{,}4$ „Der Donner braucht ca. 26 Sekunden."	1 1
f1)	entnimmt die relevanten Daten aus dem Text und dem Diagramm berechnet die absolute Häufigkeit des Wurfergebnisses „4"	abgelesen: 200 Würfe; relative Häufigkeit: 0,265 $200 \cdot 0{,}265 = 53$ Unter 200 Würfen waren 53 „4en".	1 2
f2)	entnimmt dem Diagramm die relevanten Daten	„Der Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit der „4" liegt bei 0,25." (Akzeptiert werden Werte zwischen 0,245 und 0,255.)	2
			Punkte Aufgabe 1: 19 Punkte

Prüfungsteil 2: Aufgabe 2

	Kriterien: Der Prüfling …	**Lösung:**	**Punkte:**
a)	entnimmt die relevanten Daten	$r = 225$ m	1
	berechnet die Geschwindigkeit	z. B.: $u = 2 \cdot \pi \cdot r$ $u = 2 \cdot \pi \cdot 225$ m $u = 1413{,}7\ldots$ m $3u = 4241{,}1\ldots$ m	 1 1
	gibt die Geschwindigkeit in km/h an	$v \approx 4{,}24$ km/h	1
	wählt einen anderen Lösungsweg, der sachlich richtig ist		max. 4
b)	beschreibt einen Lösungsweg in sprachlicher oder formalisierter Form	z. B.: „Die nicht bewässerte Fläche besteht aus 6 Quadratflächen, von denen die 6 Kreisflächen abgezogen werden."	3
	wählt einen anderen Lösungsweg, der sachlich richtig ist		max. 3
c)	bestimmt die Länge eines kurzen Rohres und entnimmt relevante Daten für die längeren Rohre aus Text und Zeichnung	Länge: 225 m z. B.: Katheten der Länge 225 m und 450 m	1
	berechnet die Rohrlänge mit Hilfe des Satzes von Pythagoras	$225^2 + 450^2 = 253\,125$ Länge eines Rohres: ca. 503 m	3
	berechnet die Gesamtlänge der Wasserrohre	$2 \cdot 225$ m $+ 4 \cdot 503$ m $= 2\,462$ m	1
	wählt einen anderen Lösungsweg, der sachlich richtig ist		max. 5
d1)	berechnet den Anteil der nicht bewässerten Fläche	z. B.: $1 - 6 \cdot \pi \cdot 225^2 : (1416 \cdot 840)$ $\approx 0{,}2$ 20 % der Fläche werden nicht bewässert.	3
	wählt einen anderen Lösungsweg, der sachlich richtig ist		max. 3
d2)	entnimmt die relevanten Informationen	z. B.: Radius: 225 m Form der Fläche: Parallelogramm Breite: 1416 m	1
	berechnet den vertikalen Abstand zwischen zwei Mittelpunkten mit Hilfe des Satzes von Pythagoras	z. B.:  z. B.: $\sqrt{450^2 - 225^2} \approx 389{,}71$	2
	berechnet die Höhe des Parallelogramms	$389{,}71 + 2 \cdot 225 = 839{,}71$	1
	wählt einen anderen Lösungsweg, der sachlich richtig ist		max. 4
		Punkte Aufgabe 2: 19 Punkte	

Prüfungsteil 2: Aufgabe 3

	Kriterien: Der Prüfling …	**Lösung:**	**Punkte:**
a)	kreuzt *stimmt* bzw. *stimmt nicht* jeweils richtig an	A: stimmt B: stimmt C: stimmt nicht D: stimmt nicht	1 1 1 1
b1)	ergänzt die Wahrscheinlichkeiten		2
b2)	entnimmt die relevanten Daten aus dem Text und der Tabelle wählt ein geeignetes Verfahren zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit berechnet die Wahrscheinlichkeit	Erfolgswahrscheinlichkeit: 0,7 Ereignisse: T_1 und T_2 $P(T_1 \text{ und } T_2) = 0{,}7 \cdot 0{,}7$ $P(T_1 \text{ und } T_2) = 0{,}49$	1 1 1
	wählt einen anderen Lösungsweg, der sachlich richtig ist		max. 3
b3)	entnimmt die relevanten Daten aus dem Text und der Tabelle wählt ein geeignetes Verfahren zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit berechnet die Wahrscheinlichkeit	Erfolgswahrscheinlichkeit: 0,7 (T_1 und $\overline{T}_2$) oder ($\overline{T}_1$ und T_2) $P(T_1 \text{ und } \overline{T}_2) + P(\overline{T}_1 \text{ und } T_2)$ $= 0{,}7 \cdot 0{,}3 + 0{,}3 \cdot 0{,}7$ $= 0{,}42$	1 1 1
	wählt einen anderen Lösungsweg, der sachlich richtig ist		max. 3

c)	gibt an, dass ein Koordinatensystem notwendig ist die Koordinaten abgelesen werden müssen eine quadratische Gleichung bestimmt werden muss die Gleichung mit Hilfe der Koordinaten bestimmt wird die Korbkoordinaten in Beziehung zur Flugbahn gesetzt werden müssen	z. B.: „Im ersten Schritt wird ein Koordinatensystem in das Bild gelegt. Mit dessen Hilfe kann man die Koordinaten der Ballpositionen bestimmen. Eine Parabel wird durch drei Punkte eindeutig bestimmt. Die Flugbahn wird durch $y=ax^2+bx+c$ beschrieben. Durch Einsetzen der Koordinaten der drei Punkte (Ballpositionen) erhält man ein Gleichungssystem mit drei Unbekannten. Dieses ist eindeutig zu lösen, man erhält Werte für a, b und c. Es muss dann noch geprüft werden, ob die Koordinaten des Korbes die Parabelgleichung erfüllen.“ Es werden auch alternative Lösungen akzeptiert, wie z. B.: „Vorab legt man ein Koordinatensystem in das Bild. Man kann dann die Lage des Scheitelpunktes schätzen und dann mit Hilfe eines weiteren Punktes eine Parabelgleichung bestimmen. Durch Einsetzen wird geprüft, ob die anderen gegebenen Punkte auch auf der Parabel liegen. Es muss dann noch geprüft werden, ob die Koordinaten des Korbes die Parabelgleichung erfüllen.“	 1 1 1 1 1
	wählt einen anderen Lösungsweg, der sachlich richtig ist		max. 5
			Punkte Aufgabe 3: 17 Punkte

Prüfungsteil 2: Aufgabe 4

	Kriterien: Der Prüfling …	**Lösung:**	**Punkte:**
a1)	notiert nur den richtigen Lösungsbuchstaben	B	1
a2)	nutzt mathematische Kenntnisse aus dem Bereich der quadratischen Funktionen für eine Begründung	z. B.: „Die Parabel, die durch die Gleichung $-0{,}001875 \cdot x^2 + 5$ beschrieben wird, ist nach unten geöffnet. Der Scheitelpunkt der Funktion $0{,}001875 \cdot x^2 - 5$ liegt unterhalb der x-Achse.“	2
	wählt einen anderen Lösungsweg, der sachlich richtig ist		max. 2
b)	entnimmt dem Text und der Abbildung die relevanten Daten stellt eine Gleichung zur Bestimmung der Punkte auf löst die quadratische Gleichung berechnet den Abstand	z. B.: Koordinaten: P (x|48) Funktionsgleichung: $y = 0{,}002 \cdot x^2 + 3$ $48 = 0{,}002 \cdot x^2 + 3$ $x_{1/2} = \pm 150$ 300 m	1 1 1 1
	wählt einen anderen Lösungsweg, der sachlich richtig ist		max. 4

c)	entnimmt dem Text und der Abbildung die relevanten Daten	z. B.: s ist Nullstelle Funktionsgleichung: $y = -0{,}007 \cdot x^2 + 1{,}3 \cdot x$	1
	stellt die zur Bestimmung der Spannweite notwendige quadratische Gleichung auf	Berechnung der Nullstellen $0 = -0{,}007 \cdot (x^2 - 185{,}7 \cdot x)$	1
	löst die quadratische Gleichung	$x_1 = 0$; $x_2 = 185{,}7$	1
	bestimmt die Spannweite s	$s = 185{,}7$ m	1
	wählt einen anderen Lösungsweg, der sachlich richtig ist		max. 4
	Punkte Aufgabe 4: 11 Punkte		

Übersicht über die Punkteverteilung

Prüfungsteil 1: Aufgabe 1	19
Prüfungsteil 2: Aufgabe 2	19
Prüfungsteil 2: Aufgabe 3	17
Prüfungsteil 2: Aufgabe 4	11
Umgang mit Maßeinheiten	3
Darstellungsleistung	6
Gesamt	75

Notentabelle

Note	Punkte
sehr gut	65 – 75
gut	55 – 64
befriedigend	44 – 54
ausreichend	34 – 43
mangelhaft	14 – 33
ungenügend	0 – 13

Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit im Fach Mathematik
(Gymnasium)

Name: ________________________________ Klasse: ____________

Schule: ________________________________

Prüfungsteil 1: Aufgabe 1					
	Anforderung	**Lösungsqualität**			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK[1] Punktzahl	ZK[1] Punktzahl	DK[1] Punktzahl
a)	kreuzt den richtigen Maßstab an	**2**			
b1)	ja	**1**			
b2)	nein	**1**			
b3)	nein	**1**			
c)	wählt ein Verfahren …	**1**			
	… zur Berechnung des Volumens …	**1**			
	berechnet das Volumen	**1**			
	wählt einen anderen Lösungsweg, …	**(3)**			
d)	gibt ein mögliches, sinnvolles Wertepaar an	**2**			
e1)	entnimmt die relevanten Daten	**1**			
	berechnet die Entfernung	**1**			
e2)	entnimmt die relevanten Informationen …	**1**			
	berechnet die Zeit	**1**			
f1)	entnimmt die relevanten Daten …	**1**			
	berechnet die absolute Häufigkeit …	**2**			
f2)	entnimmt dem Diagramm die … Daten	**2**			
	Summe	**19**			

Prüfungsteil 2: Aufgabe 2					
	Anforderung	**Lösungsqualität**			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK Punktzahl	ZK Punktzahl	DK Punktzahl
a)	entnimmt die relevanten Daten	**1**			
	berechnet die Geschwindigkeit (Formel)	**1**			
	berechnet die Geschwindigkeit (Wert)	**1**			
	gibt die Geschwindigkeit in km/h an	**1**			
	wählt einen anderen Lösungsweg, …	**(4)**			

[1] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur2

b)	beschreibt einen Lösungsweg …	**3**			
	wählt einen anderen Lösungsweg, …	**(3)**			
c)	bestimmt die Länge eines kurzen Rohres …	**1**			
	berechnet die Rohrlänge …	**3**			
	berechnet die Gesamtlänge der Wasserrohre	**1**			
	wählt einen anderen Lösungsweg, …	**(5)**			
d1)	berechnet den Anteil …	**3**			
	wählt einen anderen Lösungsweg, …	**(3)**			
d2)	entnimmt die relevanten Informationen	**1**			
	berechnet den vertikalen Abstand …	**2**			
	berechnet die Höhe des Parallelogramms	**1**			
	wählt einen anderen Lösungsweg, …	**(4)**			
	Summe	**19**			

Prüfungsteil 2: Aufgabe 3					
	Anforderung	**Lösungsqualität**			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK Punktzahl	ZK Punktzahl	DK Punktzahl
a)	stimmt	**1**			
	stimmt	**1**			
	stimmt nicht	**1**			
	stimmt nicht	**1**			
b1)	ergänzt die Wahrscheinlichkeiten	**2**			
b2)	entnimmt die relevanten Daten …	**1**			
	wählt ein geeignetes Verfahren …	**1**			
	berechnet die Wahrscheinlichkeit	**1**			
	wählt einen anderen Lösungsweg, …	**(3)**			
b3)	entnimmt die relevanten Daten …	**1**			
	wählt ein geeignetes Verfahren …	**1**			
	berechnet die Wahrscheinlichkeit	**1**			
	wählt einen anderen Lösungsweg, …	**(3)**			
c)	… ein Koordinatensystem notwendig ist …	**1**			
	… die Koordinaten abgelesen …	**1**			
	… quadratische Gleichung bestimmt …	**1**			
	... die Gleichung … bestimmt wird …	**1**			
	… in Beziehung zur Flugbahn …	**1**			
	wählt einen anderen Lösungsweg, …	**(5)**			
	Summe	**17**			

Prüfungsteil 2: Aufgabe 4					
	Anforderung	**Lösungsqualität**			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK Punktzahl	ZK Punktzahl	DK Punktzahl
a1)	notiert den richtigen Lösungsbuchstaben	**1**			
a2)	nutzt mathematische Kenntnisse …	**2**			
	wählt einen anderen Lösungsweg, …	**(2)**			
b)	entnimmt dem Text und der Abbildung die …	**1**			
	stellt eine Gleichung … auf	**1**			
	löst die quadratische Gleichung	**1**			
	berechnet den Abstand	**1**			
	wählt einen anderen Lösungsweg, …	**(4)**			
c)	entnimmt dem Text und der Abbildung die …	**1**			
	stellt die … quadratische Gleichung auf	**1**			
	löst die quadratische Gleichung	**1**			
	bestimmt die Spannweite *s*	**1**			
	wählt einen anderen Lösungsweg, …	**(4)**			
	Summe	**11**			

		maximal erreichbare Punktzahl	EK Punktzahl	ZK Punktzahl	DK Punktzahl
	Umgang mit Maßeinheiten	**3**			
	Darstellungsleistung	**6**			

Festsetzung der Note

	maximal erreichbare Punktzahl	EK Punktzahl	ZK Punktzahl	DK Punktzahl
Aufgabe 1	**19**			
Aufgabe 2	**19**			
Aufgabe 3	**17**			
Aufgabe 4	**11**			
Umgang mit Maßeinheiten	**3**			
Darstellungsleistung	**6**			
Gesamtpunktzahl	**75**			
Paraphe				

Die Prüfungsarbeit wird mit der Note ______________________________ bewertet.

Unterschriften, Datum: